# Corrigé – Bac 2022 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 2

Probabilités conditionnelles et suite récurrente : répartition de vélos, Étude d'une fonction exponentielle et convexité : profil d'un toboggan, Géométrie dans l'espace : triangle, plan et rayons laser, QCM : fonction logarithme et loi binomiale

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

## Exercice 1 – Probabilités conditionnelles et suite récurrente : répartition de vélos *(7 pts)*

**1.** Arbre des deux premiers matins : depuis la racine, $A_1$ (0,5) et $B_1$ (0,5). Après $A_1$ : $A_2$ (0,84) et $B_2$ (0,16). Après $B_1$ : $B_2$ (0,76) et $A_2$ (0,24).

**2. a)** $A_1$ et $B_1$ forment une partition. D'après la formule des probabilités totales : $a_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) = 0{,}5 \times 0{,}84 + 0{,}5 \times 0{,}24 = 0{,}42 + 0{,}12$. $a_2 = 0{,}54$**.**

**2. b)** $P_{A_2}(B_1) = \dfrac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}54} = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$. **Sachant que le vélo est au point A le deuxième matin, la probabilité qu'il ait été au point B le premier matin est environ** $0{,}222$**.**

**3. a)** Arbre : depuis la racine, $A_n$ ($a_n$) et $B_n$ ($b_n = 1 - a_n$). Après $A_n$ : $A_{n+1}$ (0,84) et $B_{n+1}$ (0,16). Après $B_n$ : $A_{n+1}$ (0,24) et $B_{n+1}$ (0,76).

**3. b)** D'après la formule des probabilités totales avec la partition $\{A_n ; B_n\}$ : $a_{n+1} = 0{,}84a_n + 0{,}24b_n = 0{,}84a_n + 0{,}24(1 - a_n) = 0{,}6a_n + 0{,}24$. **Pour tout** $n \geqslant 1$**,** $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$**.**

**4.** Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

*Initialisation* : $0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^0 = 0{,}6 - 0{,}1 = 0{,}5 = a_1$.

*Hérédité* : soit $n \geqslant 1$ tel que $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$. Alors $a_{n+1} = 0{,}6\left(0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}\right) + 0{,}24 = 0{,}36 - 0{,}1 \times 0{,}6^n + 0{,}24 = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^n$, ce qui est la formule au rang $n + 1$.

*Conclusion* : **pour tout entier** $n \geqslant 1$**,** $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$**.**

**5.** Comme $0 < 0{,}6 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}6^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0{,}6$ : à long terme, un vélo pris au hasard a 60 % de chances de se trouver au point A un matin donné, autrement dit environ 60 % des vélos seront au point A (et 40 % au point B) chaque matin.

**6.** $a_n \geqslant 0{,}599 \iff 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1} \leqslant 0{,}001 \iff 0{,}6^{n-1} \leqslant 0{,}01 \iff (n-1)\ln 0{,}6 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n - 1 \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6}$ (division par $\ln 0{,}6 < 0$). Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}6} \approx 9{,}02$, donc $n - 1 \geqslant 10$, soit $n \geqslant 11$. **Le plus petit entier est** $n = 11$ ($a_{10} \approx 0{,}59899 < 0{,}599$ et $a_{11} \approx 0{,}59940 \geqslant 0{,}599$) : à partir du onzième matin, la proportion de vélos au point A est d'au moins 59,9 %, c'est-à-dire pratiquement stabilisée à 60 %.

## Exercice 2 – Étude d'une fonction exponentielle et convexité : profil d'un toboggan *(7 pts)*

**Partie A**

**1.** $p$ est dérivable et $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$. Son discriminant est $\Delta = 36 - 60 = -24 < 0$, donc $p'(x) > 0$ pour tout réel $x$ (signe du coefficient 3). **$p$ est strictement croissante sur $[-3;4]$.**

**2.** $p$ est continue et strictement croissante sur $[-3;4]$, avec $p(-3) = -27 - 27 - 15 + 1 = -68 < 0$ et $p(4) = 64 - 48 + 20 + 1 = 37 > 0$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[-3;4]$.**

**3.** $p(-0{,}2) = -0{,}008 - 0{,}12 - 1 + 1 = -0{,}128 < 0$ et $p(-0{,}1) = -0{,}001 - 0{,}03 - 0{,}5 + 1 = 0{,}469 > 0$, donc $-0{,}2 < \alpha < -0{,}1$ ; de plus $p(-0{,}15) \approx 0{,}179 > 0$, donc $-0{,}2 < \alpha < -0{,}15$. $\alpha \approx -0{,}2$ (au dixième).

**4.** $p$ étant strictement croissante et s'annulant en $\alpha$ : **$p(x) < 0$ sur $[-3;\alpha[$, $p(\alpha) = 0$, $p(x) > 0$ sur $]\alpha;4]$.**

| $x$ | $-3$ | | $\alpha$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Partie B**

**1. a)** $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^x$, $u'(x) = e^x$, $v(x) = 1 + x^2$, $v'(x) = 2x$. $f'(x) = \dfrac{e^x(1+x^2) - 2xe^x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2}$. **$f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2}$.**

**1. b)** $f'(1) = \dfrac{0 \times e}{4} = 0$. **La tangente à $C_f$ au point d'abscisse $1$ a un coefficient directeur nul : elle est horizontale.**

**2. a)** Sur le graphique, la courbe part presque à plat vers $x = -3$, se redresse nettement autour de $x = 0$, forme un palier vers $x = 1$ (hauteur environ 1,4), puis repart vers le haut. Elle semble changer de concavité au moins deux fois : une première fois pour une abscisse légèrement négative (elle passe de « tournée vers le haut » à « tournée vers le bas »), puis au point d'abscisse 1, où la tangente horizontale traverse la courbe (la fonction est croissante de part et d'autre de ce point, avec une tangente horizontale : c'est un point d'inflexion). **Le toboggan semble donc posséder au moins deux points d'inflexion et assurer de bonnes sensations.**

**2. b)** Dans $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$, les facteurs $e^x$ et $(1+x^2)^3$ sont strictement positifs. Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $p(x)(x-1)$ :

sur $[-3;\alpha[$, $p(x) < 0$ et $x - 1 < 0$ : $f''(x) > 0$ ; sur $]\alpha;1[$, $p(x) > 0$ et $x - 1 < 0$ : $f''(x) < 0$ ; sur $]1;4]$, $p(x) > 0$ et $x - 1 > 0$ : $f''(x) > 0$.

$f''$ s'annule en changeant de signe en $\alpha \approx -0{,}2$ et en $1$ : **la courbe $C_f$ admet exactement deux points d'inflexion, d'abscisses $\alpha$ et $1$ ; le toboggan assure donc de bonnes sensations.**

## Exercice 3 – Géométrie dans l'espace : triangle, plan et rayons laser *(7 pts)*

**1. a)** $\overrightarrow{AR}(0;3;2)$ et $\overrightarrow{AT}(-3;0;2)$. $AR = \sqrt{0+9+4} = \sqrt{13}$ et $AT = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$. $AR = AT$ **: le triangle $ART$ est isocèle en $A$.**

**1. b)** $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 0 \times (-3) + 3 \times 0 + 2 \times 2 = 4$. $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = 4$**.**

**1. c)** $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT} = AR \times AT \times \cos\widehat{RAT}$, donc $\cos\widehat{RAT} = \dfrac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{13}} = \dfrac{4}{13}$, d'où $\widehat{RAT} = \arccos\dfrac{4}{13} \approx 72{,}1°$.

**2. a)** $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AR} = 0 - 6 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AT} = -6 + 0 + 6 = 0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $(ART)$ : $\vec{n}(2;-2;3)$ **est normal au plan $(ART)$.**

**2. b)** $(ART) : 2x - 2y + 3z + k = 0$. Avec $A(6;0;2) : 12 - 0 + 6 + k = 0$, $k = -18$. $(ART)$ **:** $2x - 2y + 3z - 18 = 0$**.** (Contrôle : $R : 12 - 6 + 12 - 18 = 0$ ; $T : 6 - 0 + 12 - 18 = 0$.)

**3. a)** $\Delta$ est orthogonale au plan $(ART)$, donc dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(2;-2;3)$, et elle passe par $S\left(3;\dfrac{5}{2};0\right)$. D'où la représentation paramétrique $x = 3 + 2k$**,** $y = \dfrac{5}{2} - 2k$**,** $z = 3k$**,** $k \in \mathbb{R}$ (pour $k = 0$ on retrouve $S$, et le vecteur directeur est $\vec{n}$).

**3. b)** $L \in \Delta \cap (ART) : 2(3 + 2k) - 2\left(\dfrac{5}{2} - 2k\right) + 3 \times 3k - 18 = 0$, soit $6 + 4k - 5 + 4k + 9k - 18 = 0$, soit $17k - 17 = 0$, $k = 1$. $L\left(5;\dfrac{1}{2};3\right)$**.** (Contrôle : $10 - 1 + 9 - 18 = 0$.)

**4. a)** $D(0;8;0)$, $E(0;0;4)$, $H(0;8;4)$, donc $K(0;4;4)$ et $\overrightarrow{DK}(0;-4;4)$. Le point $N(0;8-4t;4t)$ vérifie $\overrightarrow{DN} = (0;-4t;4t) = t\overrightarrow{DK}$. Pour $t \in [0;1]$, $N$ appartient donc au segment $[DK]$ ($t = 0$ donne $D$, $t = 1$ donne $K$). $N$ **est bien un point de $[DK]$.**

**4. b)** $\overrightarrow{SL}(2;-2;3)$ et $\overrightarrow{SN}\left(-3;\dfrac{11}{2} - 4t;4t\right)$. Les rayons sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$ : $-6 - 2\left(\dfrac{11}{2} - 4t\right) + 12t = -6 - 11 + 8t + 12t = 20t - 17$.

$20t - 17 = 0 \iff t = \dfrac{17}{20}$, qui appartient bien à $[0;1]$. **Le point cherché est** $N\left(0;8 - \dfrac{17}{5};\dfrac{17}{5}\right) = N\left(0;\dfrac{23}{5};\dfrac{17}{5}\right)$**.**

## Exercice 4 – QCM : fonction logarithme et loi binomiale *(7 pts)*

**Question 1 : réponse d.** $\ln 9 + \ln\dfrac{\sqrt{3}}{3} + \ln\dfrac{1}{9} = \ln 9 - \ln 9 + \ln\left(3^{1/2}\right) - \ln 3 = \dfrac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 = -\dfrac{1}{2}\ln 3$.

**Question 2 : réponse c.** L'équation n'a de sens que pour $x > 10$. Pour ces valeurs, $\ln\left(x(x-10)\right) = \ln 21 \iff x^2 - 10x - 21 = 0$, dont les solutions sont $x = 5 \pm \sqrt{46}$. Seule $5 + \sqrt{46} \approx 11{,}8$ est supérieure à 10 ($5 - \sqrt{46} < 0$ n'est pas dans le domaine). L'équation a une unique solution.

**Question 3 : réponse d.** $f'(x) = 2x(-1 + \ln x) + x^2 \times \dfrac{1}{x} = 2x\ln x - x = x(2\ln x - 1)$ (a est fausse). $f'(\sqrt{e}) = \sqrt{e}\left(2 \times \dfrac{1}{2} - 1\right) = 0$ (c est fausse), et $f'(x) < 0$ pour $0

**Question 4 : réponse b.** Le nombre $X$ de jetons jaunes suit $\mathcal{B}(5; 0{,}4)$ (proportion $\dfrac{20}{50} = 0{,}4$, tirages avec remise). $P(X = 2) = \binom{5}{2} \times 0{,}4^2 \times 0{,}6^3 = 10 \times 0{,}16 \times 0{,}216 = 0{,}3456 \approx 0{,}346$.

**Question 5 : réponse d.** $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}6^5 = 1 - 0{,}07776 \approx 0{,}922$.

**Question 6 : réponse c.** La moyenne sur un grand nombre de répétitions est l'espérance $E(X) = np = 5 \times 0{,}4 = 2$.

## Conseils pour le jour J

Sujet à trois exercices au choix parmi quatre (tous corrigés ici). Exercice 1 : les deux arbres sont notés, dessine-les proprement ; la relation $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$ vient de la formule des probabilités totales avec $b_n = 1 - a_n$, et la question 6 exige la résolution complète de l'inéquation avec le logarithme (attention : c'est $n - 1$ qui apparaît dans l'exposant). Exercice 2 : la partie A (fonction polynôme auxiliaire) sert uniquement à donner le signe de $p$, réutilisé pour le signe de $f''$ ; présente un tableau de signes à trois lignes ($p(x)$, $x - 1$, $f''(x)$). Exercice 3 : exercice long mais linéaire ; les vérifications « $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires » et « le point vérifie l'équation » sont attendues à chaque étape. Exercice 4 : un QCM sur les logarithmes exige de vérifier le domaine de définition (question 2) ; pour les probabilités, identifie la loi binomiale $\mathcal{B}(5; 0{,}4)$ une fois pour toutes pour les trois dernières questions.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*