Corrigé – Bac 2022 – spécialité mathématiques – Amérique du Nord, jour 1

Probabilités conditionnelles, loi binomiale et variable aléatoire : trajet vers la gare, Suite récurrente : loi de refroidissement de Newton, Géométrie dans l'espace : triangle, plan et volume d'un tétraèdre, Vrai ou faux : fonctions exponentielles, convexité et limites

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – Probabilités conditionnelles, loi binomiale et variable aléatoire : trajet vers la gare *(7 pts)*

1. a) Arbre pondéré : depuis la racine, V avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et $\bar{V}$ (voiture) avec $\frac{1}{3}$. Après V : R avec $\frac{1}{50}$ et $\bar{R}$ avec $\frac{49}{50}$. Après $\bar{V}$: R avec $\frac{1}{10}$ et $\bar{R}$ avec $\frac{9}{10}$.

1. b) V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales : $P(R) = P(V) \times P_V(R) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(R) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{150} + \frac{5}{150} = \frac{7}{150}$. $P(R) = \frac{7}{150}$**.**

1. c) $P_R(V) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)} = \frac{2/150}{7/150} = \frac{2}{7}$. **Sachant qu'il a raté son train, la probabilité que Paul ait pris son vélo est $\frac{2}{7}$.**

2. a) On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « Paul prend son vélo », de probabilité $\frac{2}{3}$; X compte les succès. X **suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(20; \frac{2}{3}\right)$.**

2. b) $P(X = 10) = \binom{20}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \approx 0{,}054$. $P(X = 10) \approx 0{,}054$**.**

2. c) $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0{,}038 = 0{,}962$ (calculatrice). $P(X \geqslant 10) \approx 0{,}962$**.**

2. d) $E(X) = np = 20 \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3} \approx 13{,}3$. **En moyenne, Paul prend son vélo environ 13 jours sur 20.**

3. $E(T) = \sum k\,P(T = k) = 10 \times 0{,}14 + 11 \times 0{,}13 + 12 \times 0{,}13 + 13 \times 0{,}12 + 14 \times 0{,}12 + 15 \times 0{,}11 + 16 \times 0{,}10 + 17 \times 0{,}08 + 18 \times 0{,}07$.

$E(T) = 1{,}4 + 1{,}43 + 1{,}56 + 1{,}56 + 1{,}68 + 1{,}65 + 1{,}6 + 1{,}36 + 1{,}26 = 13{,}5$. $E(T) = 13{,}5$: lorsqu'il prend sa voiture, le trajet de Paul jusqu'à la gare dure en moyenne 13,5 minutes (sur un grand nombre de trajets).

Exercice 2 – Suite récurrente : loi de refroidissement de Newton *(7 pts)*

1. a) Montrons par récurrence que $T_n \geqslant 20$ pour tout entier naturel n. *Initialisation* : $T_0 = 180 \geqslant 20$. *Hérédité* : si $T_n \geqslant 20$, alors $T_{n+1} = 0{,}955T_n + 0{,}9 \geqslant 0{,}955 \times 20 + 0{,}9 = 19{,}1 + 0{,}9 = 20$. *Conclusion* : **pour tout n, $T_n \geqslant 20$.**

1. b) $T_{n+1} - T_n = 0{,}955T_n + 0{,}9 - T_n = -0{,}045T_n + 0{,}9 = -0{,}045\,(T_n - 20)$ (car $0{,}045 \times 20 = 0{,}9$). Comme $T_n \geqslant 20$, $T_n - 20 \geqslant 0$ et donc $T_{n+1} - T_n \leqslant 0$. **La suite (T_n) est décroissante.**

1. c) (T_n) est décroissante et minorée par 20 : d'après le théorème de convergence monotone, (T_n) **est convergente**.

2. a) $u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0{,}955T_n + 0{,}9 - 20 = 0{,}955T_n - 19{,}1 = 0{,}955(T_n - 20) = 0{,}955u_n$. (u_n) **est géométrique de raison** $0{,}955$, de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

2. b) $u_n = 160 \times 0{,}955^n$, donc $T_n = u_n + 20 = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.

2. c) Comme $0 < 0{,}955 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}955^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 20$.

2. d) $T_n \leqslant 120 \iff 160 \times 0{,}955^n \leqslant 100 \iff 0{,}955^n \leqslant 0{,}625 \iff n\ln(0{,}955) \leqslant \ln(0{,}625) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}625)}{\ln(0{,}955)}$ (division par $\ln(0{,}955) < 0$). Or $\dfrac{\ln(0{,}625)}{\ln(0{,}955)} \approx 10{,}2$. **Les solutions sont les entiers $n \geqslant 11$.**

3. a) Le gâteau se refroidit et sa température se rapproche de celle de l'air ambiant, 20 °C, sans pouvoir descendre en dessous : **la limite 20 correspond à la température ambiante**.

3. b) La fonction part de $T = 180$ et $n = 0$, puis tant que $T > x$, elle calcule le terme suivant ($T = 0.955 \times T + 0.9$, c'est-à-dire $T_{n+1} = 0{,}955\,T_n + 0{,}9$) et ajoute 1 à n. Elle renvoie donc le plus petit entier n tel que $T_n \leqslant x$.

D'après 2.d, le plus petit entier n tel que $T_n \leqslant 120$ est 11 ($T_{10} \approx 121{,}0$ et $T_{11} \approx 116{,}4$). **temp(120) renvoie** 11 : il faut attendre 11 minutes après la sortie du four pour que la température au centre du gâteau soit inférieure ou égale à 120 °C.

Exercice 3 – Géométrie dans l'espace : triangle, plan et volume d'un tétraèdre *(7 pts)*

1. a) $\overrightarrow{JK}(-1;2;0)$ et $\overrightarrow{JL}(-4;-2;-3)$. $\overrightarrow{JK}\cdot\overrightarrow{JL} = 4-4+0 = 0$. **Le triangle JKL est rectangle en J.**

1. b) $JK = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$ et $JL = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$. Aire $= \dfrac{1}{2}\times JK \times JL = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{29}}{2}$. **L'aire de JKL est $\dfrac{\sqrt{145}}{2} \approx 6{,}02$ cm².**

1. c) Dans le triangle rectangle en J : $\tan\widehat{JKL} = \dfrac{JL}{JK} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}}$, d'où $\widehat{JKL} = \arctan\sqrt{\dfrac{29}{5}} \approx 67{,}5°$. (Ou avec le produit scalaire : $\overrightarrow{KJ}(1;-2;0)$, $\overrightarrow{KL}(-3;-4;-3)$, $\cos\widehat{JKL} = \dfrac{-3+8+0}{\sqrt{5}\times\sqrt{34}} = \dfrac{5}{\sqrt{170}}$.) $\widehat{JKL} \approx 67{,}5°$.

2. a) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{JK} = -6+6+0 = 0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{JL} = -24-6+30 = 0$. $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (JKL) : $\vec{n}(6;3;-10)$ **est normal au plan (JKL).**

2. b) $(JKL) : 6x+3y-10z+k=0$. Avec $J(2;0;1) : 12+0-10+k=0$, $k=-2$. (JKL) **:** $6x+3y-10z-2=0$**.** (Contrôle : K : $6+6-10-2=0$; L : $-12-6+20-2=0$.)

3. a) Δ passe par $T(10;9;-6)$ et a pour vecteur directeur $\vec{n}$: $x = 10+6t$**,** $y = 9+3t$**,** $z = -6-10t$**,** $t\in\mathbb{R}$**.**

3. b) H est le point de Δ appartenant au plan : $6(10+6t)+3(9+3t)-10(-6-10t)-2=0$, soit $60+36t+27+9t+60+100t-2=0$, soit $145t+145=0$, $t=-1$. $H(4;6;4)$**.** (Contrôle : $24+18-40-2=0$.)

3. c) La hauteur du tétraèdre issue de T est $TH = \|\overrightarrow{TH}\|$ avec $\overrightarrow{TH}(-6;-3;10)$: $TH = \sqrt{36+9+100} = \sqrt{145}$. Donc $V = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{145}}{2}\times\sqrt{145} = \dfrac{145}{6}$. **Le volume de $JKLT$ est $\dfrac{145}{6} \approx 24{,}2$ cm³.**

Exercice 4 – Vrai ou faux : fonctions exponentielles, convexité et limites *(7 pts)*

Affirmation 1 : VRAIE. Pour tout réel x, $1-\dfrac{1-e^x}{1+e^x}=\dfrac{1+e^x-1+e^x}{1+e^x}=\dfrac{2e^x}{1+e^x}$. En divisant numérateur et dénominateur par $e^x\neq 0$: $\dfrac{2}{e^{-x}+1}$. **L'égalité est vraie pour tout réel x.**

Affirmation 2 : VRAIE. $g(x)=\dfrac{1}{2} \iff 2e^x=e^x+1 \iff e^x=1 \iff x=0$. **L'équation admet une unique solution, $x=0$.**

Affirmation 3 : VRAIE. L'axe des abscisses est tangent à C au point d'abscisse a si et seulement si $f(a)=0$ et $f'(a)=0$. Or $f(x)=x^2e^{-x}=0 \iff x=0$ (car $e^{-x}>0$), et $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$ vérifie $f'(0)=0$. **L'axe des abscisses est tangent à C en un seul point, l'origine.**

Affirmation 4 : FAUSSE. $h'(x)=e^x(1-x^2)+e^x(-2x)=e^x(1-2x-x^2)$ et $h''(x)=e^x(1-2x-x^2)+e^x(-2-2x)=e^x(-x^2-4x-1)$. Le trinôme $-x^2-4x-1$ a pour discriminant $\Delta=16-4=12>0$: il possède deux racines distinctes, $x=-2-\sqrt{3}$ et $x=-2+\sqrt{3}$, en lesquelles il change de signe. Comme $e^x>0$, h'' s'annule en changeant de signe en ces deux valeurs : **la courbe de h admet deux points d'inflexion**, l'affirmation est fausse.

Affirmation 5 : FAUSSE. Pour $x>0$, $\dfrac{e^x}{e^x+x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{e^x}}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$, donc **la limite vaut 1, et non 0.**

Affirmation 6 : VRAIE. Pour tout réel x, $1+e^{2x}-2e^x=(e^x)^2-2e^x+1=(e^x-1)^2\geqslant 0$. **Donc $1+e^{2x}\geqslant 2e^x$ pour tout réel x.**

Conseils pour le jour J

Ce sujet 2022 propose quatre exercices dont trois à choisir ; les quatre sont corrigés ici. Exercice 1 : garde les fractions exactes ($\frac{7}{150}$, $\frac{2}{7}$) tant que l'énoncé ne demande pas d'arrondi ; pour l'espérance de T, vérifie que la somme des probabilités vaut 1 avant de calculer. Exercice 2 : c'est l'exercice le plus rentable et le plus classique (suite arithmético-géométrique) ; à la question 3.b, inutile de faire tourner le script Python à la main : il cherche le seuil de la question 2.d, donc la réponse est déjà trouvée. Exercice 3 : la structure est linéaire (triangle rectangle, aire, plan, projeté, volume) ; ne perds pas de temps sur l'angle, une valeur au dixième suffit. Exercice 4 : pour un vrai/faux, une identité algébrique (affirmations 1 et 6) se démontre par le calcul ; pour les points d'inflexion, calcule la dérivée seconde et son discriminant. Choisis tes trois exercices en 5 minutes en fonction de tes points forts et tiens-t'y.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).