Corrigé – Bac 2021 – spécialité mathématiques – Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane, jour 2

QCM de géométrie dans l'espace, Probabilités conditionnelles et loi binomiale : dépistage de la leucose féline, Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique, Exercice 4 A : fonction logarithme et comparaison de courbes, Exercice 4 B : étude d'une fonction exponentielle et convexité

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM de géométrie dans l'espace *(4 pts)*

Question 1 : réponse b. Pour $M_2(11;-9;-22)$: $-4+3t=11$ donne $t=5$, puis $y=6-15=-9$ et $z=8-30=-22$: les trois coordonnées conviennent. (Pour M_1, $t=1$ donne $z=2\neq -2$; pour M_3, $t=-1$ donne $z=14\neq 2$; pour M_4, $t=\dfrac{2}{3}$ donne $y=4\neq 3$.)

Question 2 : réponse c. Les coefficients de t donnent le vecteur directeur $\vec{u}_3(3;-3;-6)$.

Question 3 : réponse d. $\overrightarrow{AB}(-2;2;4)=-\dfrac{2}{3}\vec{u}_3$: les droites sont parallèles. De plus $A\in\mathcal{D}'$: $-4+3t=1$ donne $t=\dfrac{5}{3}$, puis $y=6-5=1$ et $z=8-10=-2$, coordonnées de A. Les droites sont donc confondues.

Question 4 : réponse c. $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(1;m;-2)$. $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$: $-2+2m-8=0$, soit $m=5$.

Exercice 2 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : dépistage de la leucose féline *(6 pts)*

1. a) Arbre : depuis la racine, M (0,4) et $\bar{M}$ (0,6). Après M : T (0,9) et $\bar{T}$ (0,1). Après $\bar{M}$: T (0,15) et $\bar{T}$ (0,85).

1. b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$. **La probabilité que le chat soit porteur et que son test soit positif est** $0{,}36$**.**

1. c) M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0{,}36 + 0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}36 + 0{,}09 = 0{,}45$. $P(T) = 0{,}45$**.**

1. d) $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}36}{0{,}45} = 0{,}8$. **Sachant que le test est positif, la probabilité que le chat soit porteur est** $0{,}8$**.**

2. a) On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli de succès « le test du chat est positif », de probabilité $0{,}45$; X compte les succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(20 ; 0{,}45)$**.**

2. b) $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0{,}45^5 \times 0{,}55^{15} \approx 0{,}036$. $P(X = 5) \approx 0{,}036$**.**

2. c) À la calculatrice, $P(X \leqslant 8) \approx 0{,}414$.

2. d) $E(X) = np = 20 \times 0{,}45 = 9$. **En moyenne, un échantillon de** 20 **chats contient** 9 **chats au test positif.**

3. a) L'événement contraire de « au moins un test positif » est « aucun test positif » ; par indépendance des n tirages, sa probabilité est $(1 - 0{,}45)^n = 0{,}55^n$. **Donc** $p_n = 1 - 0{,}55^n$**.**

3. b) La variable P contient p_n ; tant que $p_n < 0{,}99$, on passe à $n + 1$. **Le programme renvoie le plus petit entier** n **tel que** $p_n \geqslant 0{,}99$, c'est-à-dire la taille minimale de l'échantillon pour que la probabilité d'avoir au moins un test positif atteigne $0{,}99$.

3. c) On résout $1 - 0{,}55^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}55^n \leqslant 0{,}01 \iff n \ln 0{,}55 \leqslant \ln 0{,}01 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}55} \approx 7{,}7$ (division par $\ln 0{,}55 < 0$, qui change le sens). **Le programme renvoie** 8 ($p_7 \approx 0{,}985 < 0{,}99$ et $p_8 \approx 0{,}992 \geqslant 0{,}99$).

Exercice 3 – Suite récurrente homographique et suite auxiliaire arithmétique *(5 pts)*

1. $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{4}{5}$, $u_2 = \dfrac{16/5}{24/5} = \dfrac{2}{3}$, d'où $\dfrac{4}{u_0} = 4$, $\dfrac{4}{u_1} = 5$, $\dfrac{4}{u_2} = 6$: le quotient augmente de 1 à chaque rang. **On conjecture que $\dfrac{4}{u_n} = n + 4$.**

2. *Initialisation* : $u_0 = 1 > 0$. *Hérédité* : si $u_n > 0$, alors $4u_n > 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n + 4} > 0$. *Conclusion* : **pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.**

3. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \dfrac{-u_n^2}{u_n + 4}$. Comme $u_n > 0$, $-u_n^2 < 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$. **La suite (u_n) est décroissante.**

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de convergence monotone, (u_n) **converge** (vers une limite positive ou nulle).

5. $v_{n+1} = \dfrac{4}{u_{n+1}} = \dfrac{4(u_n + 4)}{4u_n} = \dfrac{u_n + 4}{u_n} = 1 + \dfrac{4}{u_n} = v_n + 1$. (v_n) **est arithmétique de raison 1 et de premier terme** $v_0 = \dfrac{4}{u_0} = 4$, donc $v_n = n + 4$ pour tout n.

6. $u_n = \dfrac{4}{v_n}$, soit $u_n = \dfrac{4}{n+4}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n + 4) = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Exercice 4 – Exercice 4 A : fonction logarithme et comparaison de courbes *(5 pts)*

Partie I

1. *En* 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=-\infty$. *En* $+\infty$: par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=1$.

2. $\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{u}{v}$ avec $u'=\dfrac{1}{x}$, $v'=2x$: $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{x(1-2\ln x)}{x^4}$. $h'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$.

3. $x^3>0$, donc $h'(x)$ a le signe de $1-2\ln x$: \$1-2\ln x>0\iff\ln x<\dfrac12\iff xh est croissante sur $]0;\sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$, avec un maximum $h(\sqrt{e})=1+\dfrac{1/2}{e}=1+\dfrac{1}{2e}\approx 1{,}18$.

4. Sur $]0;\sqrt{e}]$, h est continue, strictement croissante, avec $\lim\limits_{0^+}h=-\infty$ et $h(\sqrt{e})=1+\dfrac{1}{2e}>0$: d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ y admet une unique solution α. Sur $[\sqrt{e};+\infty[$, h est décroissante et $h(x)>\lim\limits_{+\infty}h=1>0$: pas de solution. **L'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans** $]0;+\infty[$**.** De plus $h\left(\dfrac12\right)=1+\dfrac{\ln(1/2)}{1/4}=1-4\ln 2\approx -1{,}77<0$ et $h(1)=1+0=1>0$, donc $\dfrac12<\alpha<1$.

5. D'après les variations : $h(x)<0$ **sur** $]0;\alpha[$**,** $h(\alpha)=0$ **et** $h(x)>0$ **sur** $]\alpha;+\infty[$**.**

Partie II

1. $f_1(x)-f_2(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}-x+2+\dfrac{2\ln x}{x^2}=1+\dfrac{\ln x}{x^2}$. $f_1(x)-f_2(x)=h(x)$**.**

2. D'après I.5 : sur $]0;\alpha[$, $f_1(x)-f_2(x)<0$, donc $\mathcal{C}_1$ **est en dessous de** $\mathcal{C}_2$; sur $]\alpha;+\infty[$, $\mathcal{C}_1$ **est au-dessus de** $\mathcal{C}_2$; les courbes se coupent uniquement en $x=\alpha$. Comme $h(\alpha)=0$, $\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2}=-1$, donc $f_1(\alpha)=\alpha-1-(-1)=\alpha$. **L'unique point d'intersection a pour coordonnées** $(\alpha;\alpha)$**.**

Exercice 5 – Exercice 4 B : étude d'une fonction exponentielle et convexité *(5 pts)*

Partie I On lit sur la courbe de f' : elle est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x < -1$, coupe cet axe en -1, puis reste en dessous pour $x > -1$; elle décroît jusqu'à son minimum -1, atteint en 0, puis croît en se rapprochant de l'axe.

1. f' est positive sur $]-\infty;-1[$ et négative sur $]-1;+\infty[$: f **semble croissante sur** $]-\infty;-1]$ **et décroissante sur** $[-1;+\infty[$**.**

2. f est convexe là où f' est croissante et concave là où f' est décroissante. La courbe de f' décroît jusqu'à son minimum d'abscisse 0, puis croît : f **semble concave sur** $]-\infty;0]$ **et convexe sur** $[0;+\infty[$**.**

Partie II

1. $f(x) = (x+2)e^{-x} = xe^{-x} + 2e^{-x} = \dfrac{x}{e^x} + 2e^{-x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-x} = 0$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$: **l'axe des abscisses (droite** $y=0$**) est asymptote horizontale à** $\mathcal{C}$ **en** $+\infty$**.**

2. a) $f'(x) = 1\times e^{-x} + (x+2)\times(-e^{-x}) = (1-x-2)e^{-x}$. $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$**.**

2. b) $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ a le signe de $-x-1$: positif pour $x<-1$, négatif pour $x>-1$. f **est croissante sur** $]-\infty;-1]$ **et décroissante sur** $[-1;+\infty[$, avec un maximum $f(-1) = 1\times e^{1} = e$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	croissante	e	décroissante	0

2. c) Sur $[-2;-1]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(-2) = 0$ et $f(-1) = e \approx 2{,}72$. Comme $0 \leqslant 2 \leqslant e$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires assure que **l'équation** $f(x) = 2$ **admet une unique solution** α **sur** $[-2;-1]$. $f(-1{,}6) = 0{,}4e^{1{,}6} \approx 1{,}98 < 2$ et $f(-1{,}5) = 0{,}5e^{1{,}5} \approx 2{,}24 > 2$, donc $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$; $\alpha \approx -1{,}6$ ($\alpha \approx -1{,}59$).

3. $f''(x) = -e^{-x} + (-x-1)\times(-e^{-x}) = (-1+x+1)e^{-x}$, soit $f''(x) = xe^{-x}$, du signe de x. f **est concave sur** $]-\infty;0]$ **et convexe sur** $[0;+\infty[$**.** f'' s'annule en changeant de signe en 0 : **le point** $A(0;2)$ **est le point d'inflexion de** $\mathcal{C}$ (la courbe y traverse sa tangente), ce qui confirme la conjecture de la partie I.

Conseils pour le jour J

Sujet 2021 : exercices 1 à 3 obligatoires et un exercice au choix (A ou B), les deux étant corrigés ici. Exercice 1 : pour la question 3, vérifier que A appartient à $\mathcal{D}'$ distingue « strictement parallèles » de « confondues » ; c'est le piège du QCM. Exercice 2 : exercice très classique et rentable (6 points) ; en 3.c, la méthode attendue est la résolution de l'inéquation $0{,}55^n \leqslant 0{,}01$ par le logarithme, avec contrôle de p_7 et p_8. Exercice 3 : la démonstration de la décroissance passe par le calcul de $u_{n+1} - u_n$ sous forme d'une seule fraction, et la suite arithmétique $v_n = 4/u_n$ donne l'expression explicite. Exercice A : la fonction h étudiée en partie I est exactement $f_1 - f_2$, ne refais pas l'étude ; la valeur $f_1(\alpha) = \alpha$ s'obtient en remplaçant $\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}$ par -1. Exercice B : plus court et plus guidé, avec des calculs de dérivées standard ; c'est le choix le plus sûr si tu es à l'aise avec l'exponentielle.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).