Corrigé – Bac 2021 – spécialité mathématiques – Métropole, Mayotte, La Réunion, Antilles Guyane, jour 1

QCM : étude d'une fonction exponentielle et convexité, Probabilités conditionnelles et loi binomiale : test de pièces défectueuses, Suite récurrente : refroidissement de gâteaux surgelés, Exercice 4 A : géométrie dans l'espace, distance minimale et volume d'une pyramide, Exercice 4 B : équation différentielle et étude d'une fonction exponentielle

Corrigé détaillé rédigé par Benjamin, professeur particulier – benprofparticulier.fr

Exercice 1 – QCM : étude d'une fonction exponentielle et convexité *(4 pts)*

1. Réponse c. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{2x}$, $u'(x) = 2e^{2x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$: $f'(x) = \dfrac{2xe^{2x} - e^{2x}}{x^2} = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

2. Réponse c. $f'(x)$ a le signe de $2x - 1$ (car $e^{2x} > 0$ et $x^2 > 0$) : négatif sur $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$, positif sur $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. f est décroissante puis croissante : elle admet un minimum en $\dfrac{1}{2}$ (elle n'est pas monotone).

3. Réponse a. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x} = 2\dfrac{e^{2x}}{2x}$; par croissances comparées, avec $X = 2x \to +\infty$, $\dfrac{e^X}{X} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Réponse b. Le trinôme $2x^2 - 2x + 1$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$: il est strictement positif. Sur $]0; +\infty[$, $e^{2x} > 0$ et $x^3 > 0$, donc $f''(x) > 0$: f est convexe sur $]0; +\infty[$ (et sa courbe n'a pas de point d'inflexion).

Exercice 2 – Probabilités conditionnelles et loi binomiale : test de pièces défectueuses *(5 pts)*

Partie I

1. Arbre : depuis la racine, D (0,05) et $\bar{D}$ (0,95). Après D : T (0,98) et $\bar{T}$ (0,02). Après $\bar{D}$: T (0,03) et $\bar{T}$ (0,97).

2. a) $p(D \cap T) = p(D) \times p_D(T) = 0{,}05 \times 0{,}98 = 0{,}049$. **La probabilité que la pièce soit défectueuse et présente un test positif est** $0{,}049$**.**

2. b) D et $\bar{D}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales : $p(T) = p(D \cap T) + p(\bar{D} \cap T) = 0{,}049 + 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}049 + 0{,}0285 = 0{,}0775$. $p(T) = 0{,}0775$**.**

3. $p_T(D) = \dfrac{p(D \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0{,}049}{0{,}0775} \approx 0{,}632$. **La valeur prédictive positive vaut environ** $0{,}632 < 0{,}95$ **: le test n'est pas efficace** (plus d'un tiers des pièces testées positives ne sont pas défectueuses).

Partie II

1. On répète 20 fois de façon identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli de succès « la pièce est défectueuse », de probabilité $0{,}05$; X compte les succès. X **suit la loi binomiale** $\mathcal{B}(20 ; 0{,}05)$**.**

2. $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}95^{20} \approx 1 - 0{,}358 = 0{,}64$. **La probabilité que l'échantillon contienne au moins une pièce défectueuse est environ** $0{,}64$**.**

3. $E(X) = np = 20 \times 0{,}05 = 1$. **En moyenne, un échantillon de** 20 **pièces contient** 1 **pièce défectueuse.**

Exercice 3 – Suite récurrente : refroidissement de gâteaux surgelés *(6 pts)*

I - Premier modèle

En 10 minutes, la température passe de -19 °C à 1,3 °C, soit une hausse de 20,3 °C, donc 2,03 °C par minute. Au bout de 25 minutes : $-19 + 25 \times 2{,}03 = -19 + 50{,}75 = 31{,}75$ °C. **Selon ce modèle, les gâteaux seraient à $31{,}75$ °C, ce qui dépasse la température ambiante de 25 °C : le modèle n'est pas pertinent** (des gâteaux posés sur la terrasse ne peuvent pas devenir plus chauds que l'air ambiant).

II - Second modèle

1. $T_{n+1} = T_n - 0{,}06(T_n - 25) = T_n - 0{,}06T_n + 1{,}5$. $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$**.**

2. $T_1 = 0{,}94 \times (-19) + 1{,}5 = -16{,}36$ et $T_2 = 0{,}94 \times (-16{,}36) + 1{,}5 = -13{,}8784$. $T_1 \approx -16{,}4$ **°C et** $T_2 \approx -13{,}9$ **°C.**

3. *Initialisation* : $T_0 = -19 \leqslant 25$. *Hérédité* : si $T_n \leqslant 25$, alors $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5 \leqslant 0{,}94 \times 25 + 1{,}5 = 23{,}5 + 1{,}5 = 25$. *Conclusion* : **pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$.** Ce résultat était prévisible : la température des gâteaux ne peut pas dépasser celle de l'air ambiant, 25 °C.

4. $T_{n+1} - T_n = -0{,}06(T_n - 25)$ et $T_n - 25 \leqslant 0$, donc $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$. **La suite (T_n) est croissante.**

5. (T_n) est croissante et majorée par 25 : d'après le théorème de convergence monotone, (T_n) **est convergente**.

6. a) $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0{,}94T_n + 1{,}5 - 25 = 0{,}94T_n - 23{,}5 = 0{,}94(T_n - 25) = 0{,}94U_n$. (U_n) **est géométrique de raison** $0{,}94$ **et de premier terme** $U_0 = T_0 - 25 = -44$**.**

6. b) $U_n = -44 \times 0{,}94^n$, donc $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0{,}94^n + 25$.

6. c) Comme $0 < 0{,}94 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}94^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 25$: au bout d'un temps suffisamment long, la température des gâteaux se rapproche de la température ambiante 25 °C.

7. a) Une demi-heure : $n = 30$, $T_{30} = -44 \times 0{,}94^{30} + 25 \approx 18{,}1$. **Les gâteaux sont alors à environ** 18 **°C.**

7. b) $T_n \geqslant 10 \iff -44 \times 0{,}94^n \geqslant -15 \iff 0{,}94^n \leqslant \dfrac{15}{44} \iff n \ln 0{,}94 \leqslant \ln \dfrac{15}{44} \iff n \geqslant \dfrac{\ln(15/44)}{\ln 0{,}94} \approx 17{,}4$ (division par $\ln 0{,}94 < 0$). Vérification : $T_{17} \approx 9{,}6 < 10$ et $T_{18} \approx 10{,}6 \geqslant 10$. **Cécile doit déguster son gâteau entre** 17 **et** 18 **minutes après la sortie du congélateur.**

7. c) Programme complété :

```
def seuil():
    n = 0
    T = -19
    while T < 10 :
        T = 0.94*T + 1.5
        n = n + 1
    return n
```

On part de $T_0 = -19$; tant que la température est strictement inférieure à 10, on calcule le terme suivant et on incrémente n. La fonction renvoie 18, plus petit entier n tel que $T_n \geqslant 10$.

Exercice 4 – Exercice 4 A : géométrie dans l'espace, distance minimale et volume d'une pyramide *(5 pts)*

1. d passe par $O(0;0;0)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1;1;0)$: $x = t$, $y = t$, $z = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

2. a) $\overrightarrow{AM}(t-1;t-3;-2)$, donc $AM^2 = (t-1)^2 + (t-3)^2 + (-2)^2 = t^2 - 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 4$. $AM^2 = 2t^2 - 8t + 14$.

2. b) $t \mapsto 2t^2 - 8t + 14$ est un trinôme de coefficient dominant $2 > 0$: il admet un minimum en $t = -\dfrac{-8}{2 \times 2} = 2$ (on peut aussi écrire $2t^2 - 8t + 14 = 2(t-2)^2 + 6 \geqslant 6$, avec égalité si et seulement si $t = 2$). La distance AM est donc minimale pour $t = 2$, c'est-à-dire au point $M_0(2;2;0)$, avec $AM_0 = \sqrt{6}$.

3. $\overrightarrow{AM_0}(1;-1;-2)$ et $\overrightarrow{AM_0} \cdot \vec{u} = 1 - 1 + 0 = 0$. **Les droites** (AM_0) **et** d **sont orthogonales** (M_0 est le projeté orthogonal de A sur d).

4. $\overrightarrow{AA'}(0;0;-2)$ et $\overrightarrow{A'M_0}(1;-1;0)$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan $(AA'M_0)$. $\overrightarrow{OM_0}(2;2;0)$ vérifie $\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$ et $\overrightarrow{OM_0} \cdot \overrightarrow{A'M_0} = 2 - 2 = 0$: $\overrightarrow{OM_0}$ est normal au plan $(AA'M_0)$. Comme M_0 appartient à ce plan, M_0 est le projeté orthogonal de O sur le plan $(AA'M_0)$. Pour tout point N du plan, $ON^2 = OM_0^2 + M_0N^2 \geqslant OM_0^2$ (Pythagore, $\overrightarrow{OM_0} \perp \overrightarrow{M_0N}$). M_0 **est le point du plan** $(AA'M_0)$ **le plus proche de** O.

5. On prend pour base le triangle $M_0A'A$ et pour hauteur OM_0 (orthogonale au plan de la base d'après la question 4) : $OM_0 = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. Le triangle $M_0A'A$ est rectangle en A' ($\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'M_0} = 0$), avec $A'A = 2$ et $A'M_0 = \sqrt{2}$: son aire est $\dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$. $V = \dfrac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 5 – Exercice 4 B : équation différentielle et étude d'une fonction exponentielle *(5 pts)*

1. $u'(x) = 2xe^x + x^2e^x$. Alors $u(x) + 2xe^x = x^2e^x + 2xe^x = u'(x)$. u **est solution de** (E).

2. a) Si f est solution de (E) : $g'(x) = f'(x) - u'(x) = (f(x) + 2xe^x) - (u(x) + 2xe^x) = f(x) - u(x) = g(x)$. g **est solution de** $y' = y$.

2. b) Les solutions de $y' = y$ sont les fonctions $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. D'après 2.a et sa réciproque, f est solution de (E) si et seulement si $f - u$ est de cette forme. **Les solutions de** (E) **sont les fonctions** $x \mapsto x^2e^x + Ke^x = (x^2 + K)e^x$**, avec** $K \in \mathbb{R}$.

3. a) $u'(x) = (x^2 + 2x)e^x = x(x+2)e^x$. Comme $e^x > 0$, $u'(x)$ a le signe de $x(x+2)$: **positif sur** $]-\infty;-2[$**, négatif sur** $]-2;0[$**, positif sur** $]0;+\infty[$, nul en -2 et 0.

3. b) u **est croissante sur** $]-\infty;-2]$**, décroissante sur** $[-2;0]$ **et croissante sur** $[0;+\infty[$, avec $u(-2) = 4e^{-2} \approx 0{,}54$ (maximum local) et $u(0) = 0$ (minimum local).

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u		croissante	$4e^{-2}$	décroissante	0	croissante	

3. c) $u''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$, du signe de $x^2 + 4x + 2$, de discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$ et de racines $x_1 = -2 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2}$. Le trinôme est négatif entre ses racines, donc $u'' \leqslant 0$ exactement sur $[-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}]$. **Le plus grand intervalle sur lequel** u **est concave est** $\left[-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}\right]$.

Conseils pour le jour J

Sujet 2021 : exercices 1 à 3 obligatoires et un exercice au choix (A ou B), les deux étant corrigés ici. Exercice 1 : le QCM se traite en 15 minutes ; la question 4 se règle avec le discriminant du trinôme donné dans f''. Exercice 2 : la valeur prédictive positive est une probabilité conditionnelle « à l'envers » ($p_T(D)$) : ne la confonds pas avec $p_D(T) = 0{,}98$; conclus explicitement sur l'efficacité. Exercice 3 : le premier modèle se réfute par une phrase de bon sens (température supérieure à l'ambiante) ; dans le second, la question 7.b exige la résolution de l'inéquation par le logarithme, avec vérification numérique de T_{17} et T_{18}. Exercice A : la clé de la question 4 est de montrer que $\overrightarrow{OM_0}$ est normal au plan ; Exercice B : c'est l'exercice le plus court et le plus prévisible du sujet si tu connais la structure « solution particulière + solutions de l'équation homogène ». Choisis selon ton aisance en géométrie ou en équations différentielles, sans tarder.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).