

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

Un commerçant vient de s'équiper d'un distributeur de glaces à l'italienne.

1. La durée, en mois, de fonctionnement sans panne de son distributeur de glaces à l'italienne est modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif (on rappelle que la fonction f de densité de la loi exponentielle est donnée sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$).

Le vendeur de l'appareil assure que la durée moyenne de fonctionnement sans panne de ce type de distributeur, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X , est de 10 mois.

- Justifier que $\lambda = 0,1$.
- Calculer la probabilité que le distributeur de glaces à l'italienne n'ait connu aucune panne pendant les six premiers mois.
- Sachant que le distributeur n'a connu aucune panne pendant les six premiers mois, quelle est la probabilité qu'il n'en connaisse aucune jusqu'à la fin de la première année? Justifier.
- Le commerçant remplacera son distributeur de glaces à l'italienne au bout d'un temps t , exprimé en mois, qui vérifie que la probabilité de l'évènement $(X > t)$ est égale à 0,05. Déterminer la valeur de t arrondie à l'entier.

2. La notice du distributeur de glaces précise que le distributeur fournit des glaces à l'italienne dont la masse est comprise entre 55 g et 65 g.

On considère la variable aléatoire M représentant la masse, en grammes, d'une glace distribuée. On admet que M suit la loi normale d'espérance 60 et d'écart-type 2,5.

- Calculer la probabilité que la masse d'une glace à l'italienne choisie au hasard parmi celles distribuées soit comprise entre 55 g et 65 g.
 - Déterminer la plus grande valeur de m , arrondie au gramme près, telle que la probabilité $P(M \geq m)$ soit supérieure ou égale à 0,99.
3. Le distributeur de glaces à l'italienne permet de choisir un seul des deux parfums : vanille ou fraise. Pour mieux gérer ses achats de matières premières, le commerçant fait l'hypothèse qu'il y aura en proportion deux acheteurs de glace à la vanille pour un acheteur de glace à la fraise. Le premier jour d'utilisation de son distributeur, il constate que sur 120 consommateurs, 65 ont choisi de la glace à la vanille.

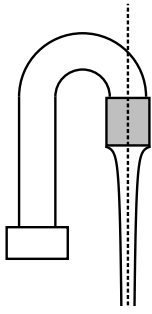
Pour quelle raison mathématique pourrait-il mettre en doute son hypothèse? Justifier.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.



On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe 1** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée en **annexe 1** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0; 1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$(H) : f(1) = 0 \quad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré? Pourquoi?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = k \ln x$.
 - a. Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).
 - b. La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi?
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0; 1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20} \left(x - \frac{1}{x^4} \right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0; 1]$ une unique solution qui sera notée α . Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
2. On admet que le volume d'eau en cm^3 , contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx$.
 - a. Soit u la fonction dérivable sur $]0; 1]$ définie par $u(x) = \frac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.
 - b. Déterminer la valeur exacte de V . En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V .

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
2. a. Calculer $I_0 - I_1$.
b. En déduire I_1 .
3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
b. Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n .
4. Soit n un entier naturel non nul.
On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
b. En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

- a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
- b. Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité**

Sur la figure donnée en **annexe 2 à rendre avec la copie** :

- ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 12$, $AD = 18$ et $AE = 6$
- EBDG est un tétraèdre.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine A dans lequel les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $B(12; 0; 0)$, $D(0; 18; 0)$ et $E(0; 0; 6)$.

1. Démontrer que le plan (EBD) a pour équation cartésienne $3x + 2y + 6z - 36 = 0$.
2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
b. En déduire que la droite (AG) coupe le plan (EBD) en un point K de coordonnées $(4; 6; 2)$.
3. La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) ? Justifier.
4. a. Soit M le milieu du segment [ED]. Démontrer que les points B, K et M sont alignés.
b. Construire alors le point K sur la figure donnée en annexe 2 à rendre avec la copie.
5. On note P le plan parallèle au plan (ADE) passant par le point K.
a. Démontrer que le plan P coupe le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).
b. Construire alors sur l'**annexe 2** à rendre avec la copie l'intersection du plan P et de la face EBD du tétraèdre EBDG.

Exercice 4**5 points****Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10 864	40 545	151 316	564 719	2 107 560

1. Conjecturer les valeurs possibles du chiffre des unités des termes de la suite (v_n) .
2. On admet que pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
 - a. Justifier que pour tout entier naturel n , $\begin{cases} u_{n+3} &= 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} &= 15u_n + 26v_n \end{cases}$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel n : $v_{n+3} \equiv v_n [5]$.
3. Soit r un entier naturel fixé. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout entier naturel q , $v_{3q+r} \equiv v_r [5]$.
4. En déduire que pour tout entier naturel n le terme v_n est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
5. Conclure quant à l'ensemble des valeurs prises par le chiffre des unités des termes de la suite (v_n) .

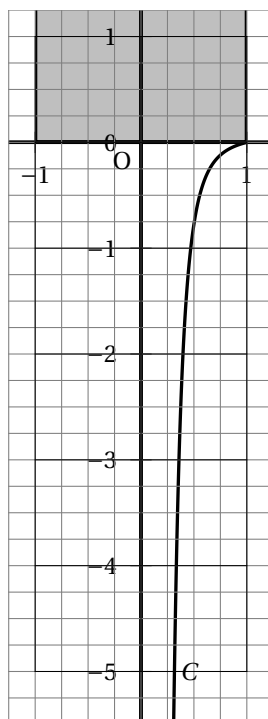
Partie B

L'objectif de cette partie est de démontrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel en utilisant la matrice M .

Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $\sqrt{3}$ est un nombre rationnel. Dans ce cas, $\sqrt{3}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls, avec q le plus petit entier naturel possible.

1. Montrer que $q < p < 2q$.
2. On admet que la matrice M est inversible. Donner son inverse M^{-1} (aucune justification n'est attendue).
Soit le couple $(p' ; q')$ défini par $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.
3.
 - a. Vérifier que $p' = 2p - 3q$ et que $q' = -p + 2q$.
 - b. Justifier que $(p' ; q')$ est un couple d'entiers relatifs.
 - c. On rappelle que $p = q\sqrt{3}$. Montrer que $p' = q'\sqrt{3}$.
 - d. Montrer que $0 < q' < q$.
 - e. En déduire que $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe 1 (exercice 2) :



Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie

