

Corrigé du baccalauréat ES Métropole – La Réunion

22 juin 2016

Exercice 1

Commun à tous les candidats

4 points

1. **b**

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % est $\left[\frac{225}{300} - \frac{1}{\sqrt{300}}; \frac{225}{300} + \frac{1}{\sqrt{300}} \right] \approx [0,692; 0,808]$.

2. **d**

Si X est la variable aléatoire donnant un nombre au hasard dans l'intervalle $[4; 11]$; alors

$$P(X \leq 10) = \frac{10-4}{11-4} = \frac{6}{7}.$$

3. **d**

$f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$ donc $f'(x) = 1 \times e^{-2x+3} + (x+1)(-2)e^{-2x+3} = (-2x-1)e^{-2x+3}$

4. **c**

La dérivée seconde f'' s'annule et change de signe en $x = 1$, donc la courbe représentant la fonction f admet un point d'inflexion en $x = 1$.

Exercice 2

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

5 points

1. D'une année sur l'autre, le loueur vend 25 % de ses voitures donc il lui en reste 75 %, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{25}{100} = 0,75$. De plus, il achète 3 000 voitures chaque année, qu'il faut ajouter au nombre de voitures du parc automobile.

On a alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,75 \times u_n + 3000$.

2. **a.** On cherche une expression du type $v_{n+1} = q \times v_n$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12000 \\ &= 0,75 \times u_n + 3000 - 12000 \\ &= 0,75 \times (v_n + 12000) - 9000 \\ &= 0,75 \times v_n + 9000 - 9000 \\ v_{n+1} &= 0,75 \times v_n \end{aligned}$$

$$v_0 = u_0 - 12000 = 10000 - 12000 = -2000$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,75 de premier terme -2000 .

b. Pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n$ soit $v_n = -2000 \times 0,75^n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0 \text{ car } 0 < 0,75 < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -2000 \times 0,75^n = 0.$$

La limite de la suite (v_n) est 0.

c. $u_n = v_n + 12000$ donc, $u_n = 12000 - 2000 \times 0,75^n$.

d. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 12000 - 2000 \times 0,75^n = 12000$.

On peut conjecturer qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre de voitures se stabilisera à 12 000.

3. **a.** On complète l'algorithme :

Initialisation	U prend la valeur 10 000 N prend la valeur 0
Traitement	Tant que U < 11 950 faire N prend la valeur N + 1 U prend la valeur 0,75 U + 3000
Sortie	Fin Tant que Afficher N

- b. La calculatrice donne $N=13$, ce qui correspond à l'année 2028.
 c. Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned} 12000 - 2000 \times 0,75^n &\geq 11950 \iff -2000 \times 0,75^n \geq 11950 - 12000 \\ &\iff 0,75^n \leq \frac{-50}{-2000} \\ &\iff \ln(0,75^n) \leq \ln(0,025) \\ &\iff n \ln(0,75) \leq \ln(0,025) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)} \end{aligned}$$

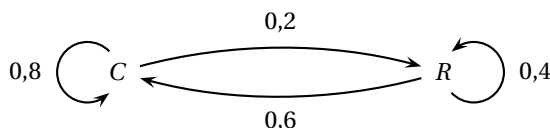
Or, $\frac{\ln(0,025)}{\ln(0,75)} \approx 12,8$ donc, on retrouve bien la valeur de $n = 13$.

Exercice 2

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et R :



$$2. \begin{cases} c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n \\ r_{n+1} = 0,2c_n + 0,4r_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} c_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & r_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition de ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.

$$3. \text{ On donne } M^6 = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer la probabilité c_6 qu'Hugo coure le 7^e jour, il faut déterminer P_6 . d'après le cours, on sait que

$$P_6 = P_0 \times M^6 \text{ donc : } \begin{pmatrix} c_6 & r_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \\ 0,749952 & 0,250048 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,750016 & 0,249984 \end{pmatrix}$$

La probabilité qu'Hugo coure le 7^e jour est d'environ **0,75**.

4. a. Par définition, $P_{n+1} = P_n \times M$.

$$b. P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{cases} c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n \\ r_{n+1} = 0,2c_n + 0,4r_n \end{cases} \implies c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n$$

Mais, d'après le texte, pour tout n : $c_n + r_n = 1$ donc :

$$c_{n+1} = 0,8c_n + 0,6r_n = 0,8c_n + 0,6(1 - c_n) = 0,8c_n + 0,6 - 0,6c_n = 0,2c_n + 0,6$$

5. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par $v_n = c_n - 0,75$; donc $c_n = v_n + 0,75$.

$$a. v_{n+1} = c_{n+1} - 0,75 = 0,2c_n + 0,6 - 0,75 = 0,2(v_n + 0,75) - 0,15 = 0,2v_n + 0,15 - 0,15 = 0,2v_n$$

$$v_0 = c_0 - 0,75 = 1 - 0,75 = 0,25$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme $v_0 = 0,25$.

- b. On déduit de la question précédente que, pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = 0,25 \times 0,2^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $0,2$ et $0 < 0,2 < 1$ donc **la suite (v_n) a pour limite 0**.

- c. On a vu que, pour tout n , $c_n = v_n + 0,75$ et que $v_n = 0,25 \times 0,2^n$;
 on en déduit que, pour tout n , $c_n = 0,75 + 0,25 \times 0,2^n$.

- d. On sait que la suite (v_n) a pour limite 0 et que, pour tout n , $c_n = 0,75 + v_n$; on peut donc en déduire que la suite (c_n) a pour limite 0,75.

Entre le 1^{er} janvier et le 29 décembre, il y a plus de 360 jours et on sait que $c_6 \approx 0,75$; donc on peut raisonnablement déduire que **la probabilité qu'Hugo coure le 29 décembre est voisine de 0,75**.

- e. On peut conjecturer que l'état stable $(c \ r)$ correspond à $c = 0,75$ et $r = 1 - c = 0,25$.

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 \times 0,8 + 0,25 \times 0,6 & 0,75 \times 0,2 + 0,25 \times 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$$

L'état stable du système est donc $(0,75 \ 0,25)$.

Exercice 3

Commun à tous les candidats

5 points

Partie A

1. Une chanson est choisie au hasard et de façon équiprobable donc : $p(R) = \frac{960}{3200} = 0,3$.
2. 35 % des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français donc : $p_R(F) = \frac{35}{100} = 0,35$.
3. $p(R \cap F) = p(R) \times p_R(F) = 0,3 \times 0,35 = 0,105$
4. D'après la formule des probabilités totales :
 $p(F) = p(R \cap F) + p(\bar{R} \cap F)$ donc : $p(F \cap \bar{R}) = p(F) - p(R \cap F)$
 38,5 % des chansons sont interprétées en français donc $p(F) = 0,385$.
 $p(F \cap \bar{R}) = 0,385 - 0,105 = 0,28$
5. $p_{\bar{R}}(F) = \frac{p(F \cap \bar{R})}{p(\bar{R})} = \frac{0,28}{1 - 0,3} = 0,4$
 40 % des chansons qui ne sont pas dans la catégorie rock sont interprétées en français.

Partie B

1. À la calculatrice, on trouve $p(15 \leq X \leq 45) \approx 0,866$.
2. À la calculatrice, on trouve $p(X \geq 60) \approx 0,001$.

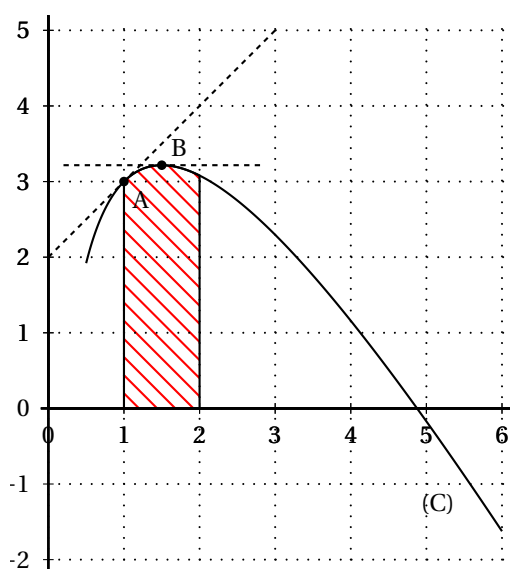
Exercice 4

Commun à tous les candidats

6 points

PARTIE A : ÉTUDE GRAPHIQUE

1. La tangente au point d'abscisse 1,5 est horizontale, donc $f'(1,5) = 0$.
2. La tangente au point A a pour coefficient directeur 1 et comme ordonnée à l'origine 2 donc, une équation de sa tangente est $T : y = x + 2$.
3. L'aire est comprise entre 3 et 4 unités d'aire.
4. La courbe semble concave sur l'intervalle $[0,5; 6]$ car elle semble se situer en tout point en dessous de sa tangente.



PARTIE B : ÉTUDE ANALYTIQUE

1. $f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x)$. On calcule $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5; 6]$:

$$f'(x) = -2 \times 1 + 0 + 3 \times \frac{1}{x} = -2 + \frac{3}{x} = \frac{-2x+3}{x}$$

2. • $f(0,5) = -2 \times 0,5 + 5 + 3\ln(0,5) = 4 + 3\ln(0,5) \approx 1,9 > 0$
 • $f(1,5) = -2 \times 1,5 + 5 + 3\ln(1,5) = 2 + 3\ln(1,5) \approx 3,2 > 0$
 • $f(6) = -2 \times 6 + 5 + 3\ln(6) = -7 + 3\ln(6) \approx -1,6 < 0$

On obtient le tableau de signes et de variations suivant :

x	0,5	1,5	α	6
signe de $-2x+3$		0	-	
signe de x		+	+	
signe de $f'(x)$		0	-	
variations de f	$4 + 3\ln(0,5)$	$2 + 3\ln(1,5)$	0	$-7 + 3\ln(6)$

3. Sur l'intervalle $[0,5; 1,5]$, le minimum de f est 1,9 qui est strictement positif, il n'y a donc pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1,5; 6]$, la fonction f est décroissante et continue.

$f(1,5) > 0$ et $f(6) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1,5; 6]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5; 6]$.

La calculatrice donne : $\begin{cases} f(4,87) \approx 0,009 > 0 \\ f(4,88) \approx -0,005 < 0 \end{cases}$

Une valeur approchée de α à 10^{-2} près est 4,87 (ou 4,88).

4. Par lecture du tableau de variations et d'après la question précédente, f est positive sur $[0,5; \alpha]$ et négative sur $[\alpha; 6]$, d'où le tableau de signes :

x	0,5	α	6
signe de $f(x)$		0	
	+	0	-

5. a. On calcule la dérivée de la fonction F définie par $F(x) = -x^2 + 2x + 3x\ln(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2 \times x + 2 \times 1 + 3 \times \ln(x) + 3x \times \frac{1}{x} \\ &= -2x + 2 + 3\ln(x) + 3 \\ &= -2x + 5 + 3\ln(x) \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f .

- b. Soit $\mathcal{A}$ l'aire demandée. f est positive sur $[1; 2]$ donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^2 f(x) dx \\ &= F(2) - F(1) \\ &= (-2^2 + 2 \times 2 + 3 \times 2\ln(2)) - (-1^2 + 2 \times 1 + 3 \times 1\ln(1)) \\ &= -4 + 4 + 6\ln(2) + 1 - 2 \\ \mathcal{A} &= 6\ln(2) - 1 \approx 3,159 \end{aligned}$$

L'aire est égale à $6\ln(2) - 1 \approx 3,2$ unités d'aire au dixième près.