Durée : 4 heures

Baccalauréat S Centres étrangers 10 juin 2015

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

   On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leqslant X \leqslant 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

   Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme* ;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux ;

- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux ;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* » ;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p.
   Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.*

Exercice 2 — 4 points

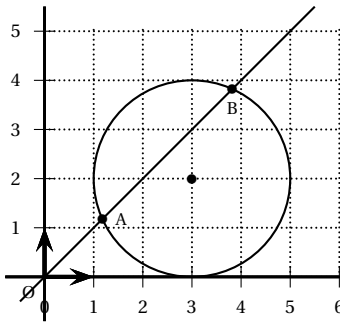
Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions :

$$|z-1| = |z-\mathrm{i}| \quad \text{et} \quad |z-3-2\mathrm{i}| \leqslant 2.$$

Sur la figure ci-contre, on a représenté le cercle de centre le point de coordonnées (3 ; 2) et de rayon 2, et la droite d'équation $y = x$.
Cette droite coupe le cercle en deux points A et B.



Affirmation 1 : l'ensemble S est le segment [AB].

2. Affirmation 2 : le nombre complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{1515}$ est un réel.

Pour les questions 3 *et* 4, *on considère les points* E(2 ; 1 ; - 3), F(1 ; −1 ; 2) *et* G(−1 ; 3 ; 1) *dont les coordonnées sont définies dans un repère orthonormé de l'espace.*

3. Affirmation 3 : une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 2t \\ y & = & -3+4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 7-10t \end{array}\right.$$

4. Affirmation 4 : une mesure en degré de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{FEG}}$, arrondie au degré, est 50°.*

Exercice 3 — 7 points

Commun à tous les candidats

Soit a un nombre réel fixé non nul.
Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}\left(\mathrm{e}^{u_n} - 1\right)$.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - x.$$

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (\mathrm{e}^{x} - 1)(2\mathrm{e}^{x} + 1)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2. Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Dans cette question, on prend $a = 0,02$.
L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur $0,02$ n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.*

Exercice 4 — 5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

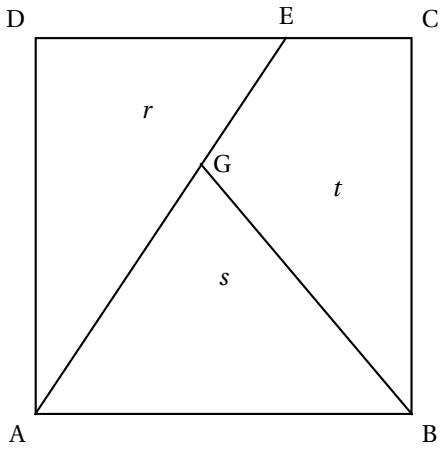
Les parties A et B sont indépendantes

Le fabricant de cadenas de la marque « K » désire imprimer un logo pour son entreprise.
Ce logo a la forme d'une lettre majuscule K stylisée, inscrite dans un carré ABCD, de côté une unité de longueur, et respectant les conditions C1 et C2 suivantes :

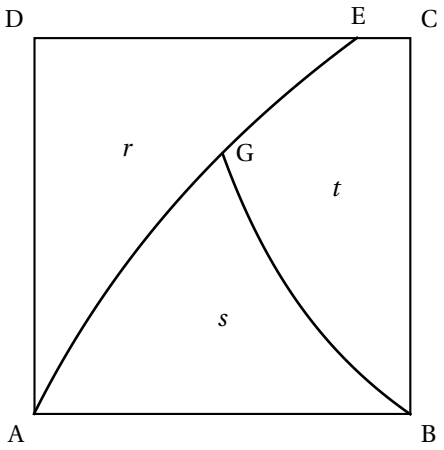
- Condition C1 : la lettre K doit être constituée de trois lignes :
  - une des lignes est le segment [AD] ;
  - une deuxième ligne a pour extrémités le point A et un point E du segment [DC] ;
  - la troisième ligne a pour extrémité le point B et un point G situé sur la deuxième ligne.

• Condition C2 : l'aire de chacune des trois surfaces délimitées par les trois lignes dessinées dans le carré doit être comprise entre 0,3 et 0,4, l'unité d'aire étant celle du carré. Ces aires sont notées r, s, t sur les figures ci-après.

Un atelier de design propose deux dessins possibles, représentés ci-dessous :



Proposition A



Proposition B

Pour mener les études qui suivent, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}}\right)$.

Partie A : étude de la proposition A

Dans cette proposition les trois lignes sont des segments et les trois aires sont égales : $r = s = t = \dfrac{1}{3}$.
Déterminer les coordonnées des points E et G.

Partie B : étude de la proposition B

Cette proposition est caractérisée par les deux modalités suivantes :
• la ligne d'extrémités A et E est une portion de la représentation graphique de la fonction f définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \ln(2x+1)$;
• la ligne d'extrémités B et G est une portion de la représentation graphique de la fonction g définie pour tout réel $x > 0$ par : $g(x) = k\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$, où k est un réel positif qui sera déterminé.

1. **a)** Déterminer l'abscisse du point E.
   b) Déterminer la valeur du réel k, sachant que l'abscisse du point G est égale à 0,5.
2. **a)** Démontrer que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie pour tout réel $x \geqslant 0$ par :

$$F(x) = (x+0,5) \times \ln(2x+1) - x.$$

   b) Démontrer que $r = \dfrac{\text{e}}{2} - 1$.
3. Déterminer une primitive G de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. On admet que les résultats précédents permettent d'établir que
   $s = [\ln(2)]^2 + \dfrac{\ln(2)-1}{2}$.
   La proposition B remplit-elle les conditions imposées par le fabricant ?*

Exercice 4 5 points

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2. Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3. Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
   $n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
   L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
   Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
   $120 = 2^3 \times 15$.
   a) Donner la décomposition de l'entier 192.
   b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2 , montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

   On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels x, y jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1. Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2 015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2015)$.
2. On admet que, pour tout entier naturel n,
   $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
   Déterminer un TP de la forme $(2015,\ y,\ z)$.
3. **a)** En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x,\ 2015,\ z)$.*