

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

On regroupe les données du texte dans un tableau :

	<i>F</i>	<i>G</i>	Total
<i>R</i>	8	12	20
<i>A</i>	9	11	20
Total	17	23	40

Comme on choisit un élève au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité.

1. Il y a 23 garçons pour 40 élèves donc : $P(G) = \frac{23}{40} = 0,575$.

Il y a 12 garçons qui font du russe donc : $P(R \cap G) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3$.

Il y a 20 élèves qui font du russe donc : $P(R) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. « L'élève choisi est une fille qui étudie l'allemand » est l'événement $F \cap A$ et il y a 9 filles qui font de l'allemand ; $P(F \cap A) = \frac{9}{40} = 0,225$.

3. On cherche $P_R(G)$; $P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0,3}{0,5} = \frac{3}{5} = 0,6$.

4. On procède successivement deux fois au choix d'un élève, le même élève pouvant être choisi deux fois. On peut représenter les langues étudiées par les couples $(R; R)$, $(R; A)$, $(A; R)$ et $(A; A)$.

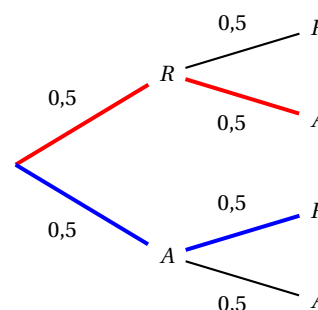
L'événement « les deux élèves choisis n'étudient pas la même langue » correspond à $(R; A) \cup (A; R)$.

$$P((R; A)) = P(R) \times P(A) = 0,5 \times 0,5 = 0,25;$$

$$P((A; R)) = P(A) \times P(R) = 0,5 \times 0,5 = 0,25;$$

les deux événements $(R; A)$ et $(A; R)$ sont incompatibles donc la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.

La probabilité cherchée est $0,25 + 0,25 = 0,5$.



EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

1. Le nombre g_n représente le pourcentage de personnes inscrites au club l'année n , et p_n le pourcentage de personnes non inscrites à ce club. Donc $g_n + p_n = 1$.

2. a. Pour déterminer le pourcentage g_{n+1} des inscrits au club l'année $n + 1$, il faut ajouter

- 30 % des personnes inscrites au club l'année n , soit $0,3g_n$;
- 10 % des personnes non inscrites l'année n , soit $0,1p_n$.

$$\text{Donc } g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n.$$

b. On a vu que $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n$; or $g_n + p_n = 1$ donc :

$$g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1(1 - g_n) \iff g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1 - 0,1g_n \iff g_{n+1} = 0,2g_n + 0,1$$

3. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = g_n - 0,125$.

$u_{n+1} = g_{n+1} - 0,125 = 0,2g_n + 0,1 - 0,125 = 0,2g_n - 0,025$; or $u_n = g_n - 0,125$ donc $g_n = u_n + 0,125$.
Donc $u_{n+1} = 0,2(u_n + 0,125) - 0,025 = 0,2u_n + 0,025 - 0,025 = 0,2u_n$.

$$u_0 = g_0 - 0,125 = 0,2 - 0,125 = 0,075$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0,075$ et de raison $q = 0,2$.

4. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0,075$ et de raison $q = 0,2$ donc, pour tout n , $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 0,075 \times 0,2^n$.

On peut en déduire que tous les termes de la suite (u_n) sont positifs.

Pour tout n , $u_{n+1} = 0,2u_n$; or $u_n > 0$ et $0,2 < 1$ donc $0,2u_n < u_n$ ce qui veut dire que, pour tout n , $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

5. On a vu que, pour tout n , $u_n = 0,075 \times 0,2^n$; or $g_n = u_n + 0,125$ donc $g_n = 0,125 + 0,075 \times 0,2^n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $0,2$; or $0 < 0,2 < 1$ donc la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0 . Or $g_n = 0,125 + u_n$ donc, d'après les théorèmes sur les limites de suites, la suite (g_n) a pour limite $0,125$.

De plus, la suite (u_n) est décroissante donc la suite (g_n) l'est aussi.

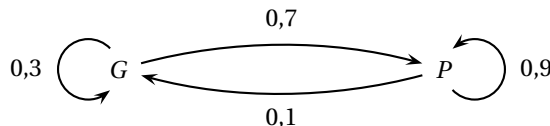
On peut donc dire que la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique tend en décroissante vers $12,5\%$.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

1. On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste :



2. D'après le texte, on a : $\begin{cases} g_{n+1} = 0,3g_n + 0,1p_n \\ p_{n+1} = 0,7g_n + 0,9p_n \end{cases}$; donc $\begin{pmatrix} g_n & p_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{n+1} & p_{n+1} \end{pmatrix}$

La matrice de transition est donc $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

3. $E_1 = E_0 \times A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$

Donc au bout d'un an, il y a 14% de la population qui est inscrite au club de gymnastique et 86% qui ne l'est pas.

$$E_2 = E_1 \times A = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,86 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,128 & 0,872 \end{pmatrix}$$

Donc au bout de deux ans, il y a $12,8\%$ de la population qui est inscrite au club de gymnastique et $87,2\%$ qui ne l'est pas.

4. L'état probabiliste stable est l'état $(g \ p)$ tel que $\begin{cases} (g \ p) \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (g \ p) \\ g + p = 1 \end{cases}$

$$(g \ p) \times \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (g \ p) \iff \begin{cases} 0,3g + 0,1p = g \\ 0,7g + 0,9p = p \end{cases} \iff \begin{cases} 0,7g - 0,1p = 0 \\ 0,7g - 0,1p = 0 \end{cases} \iff 7g = p$$

$$\begin{cases} 7g = p \\ g + p = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} g = 1/8 \\ p = 7/8 \end{cases} ; \text{l'état stable est } (0,125 \ 0,875).$$

Si le pourcentage d'inscrits au club de gymnastique est $12,5\%$, ce pourcentage restera stable pour les années suivantes.

EXERCICE 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. La fonction G définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x + 10$

$$G'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Donc G est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$.

Affirmation vraie

2. La fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ a pour primitive $F : x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$.

$$\text{Donc } \int_0^1 (x^2 + 1) dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0 = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{3}$$

Affirmation fausse

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

On sait d'après le cours que l'espérance mathématique $E(X)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ est $\frac{b+a}{2}$; sur l'intervalle $[0; 1]$ on a : $E(X) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$.

Affirmation fausse

4. Dans une population, la proportion de garçons à la naissance est $p = 0,51$.

Pour une proportion p et un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\text{Pour } n = 100 \text{ et } p = 0,51 \text{ l'intervalle est : } \left[0,51 - 1,96 \frac{\sqrt{0,51(1-0,51)}}{\sqrt{100}} ; 0,51 + 1,96 \frac{\sqrt{0,51(1-0,51)}}{\sqrt{100}} \right]$$

ce qui donne bien, en arrondissant à 0,001 près, l'intervalle $[0,412; 0,608]$.

Affirmation vraie

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2; 5]$ par $f(x) = (3-x)e^x + 1$.

1. $f'(x) = (-1)e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$
 $f''(x) = (-1)e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$

2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[2; 5]$; pour tout x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2-x$.

Sur $[2; 5]$, $2-x < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[2; 5]$.

3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2; 5]$.

De plus : $f(2) = (3-2)e^2 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,4 > 0$ et $f(5) = (3-5)e^5 + 1 = -2e^5 + 1 \approx -296 < 0$.

Or $0 \in [f(5); f(2)]$ donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2; 5]$.

Comme $f(3) = (3-3)e^3 + 1 = 1 > 0$ et $f(4) = (3-4)e^4 + 1 = -e^4 + 1 \approx -53,6 < 0$, on peut dire que : $3 < \alpha < 4$.

4. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.

La droite T a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$;

or $f'(x) = (2-x)e^x$ donc $f'(3) = (2-3)e^3 = -e^3$ et $f(3) = 1$.

Donc l'équation de T est : $y = -e^3(x-3) + 1$ soit $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.

- b. Le point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 et pour abscisse la solution de l'équation $-e^3x + 3e^3 + 1 = 0$.

$$-e^3x + 3e^3 + 1 = 0 \iff 3e^3 + 1 = e^3x \iff \frac{3e^3 + 1}{e^3} = x \iff x = 3 + e^{-3}$$

Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(3 + e^{-3}; 0)$.

c. $f''(x) = (1-x)e^x$ est du signe de $1-x$ car $e^x > 0$ pour tout x .

Sur $[2;5]$, $1-x < 0$ donc $f''(x) < 0$ donc f est concave.

d. Sur $[2;5]$, la fonction f est concave ; donc sur $[2;5]$, la courbe représentant f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Le point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses est donc situé à gauche du point d'intersection de la tangente T avec cet axe.

Donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses (la solution de l'équation $f(x) = 0$) est inférieure à l'abscisse du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses : $\alpha < 3 + e^{-3}$.

On a donc : $3 < \alpha < 3 + \frac{1}{e^3} < 3,05$.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3 Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$ Affecter à m la valeur $\frac{a+b}{2}$ SI $f(m) > 0$ ALORS Affecter à a la valeur m SINON Affecter à b la valeur m FIN SI FIN TANT QUE
Sortie :	Afficher a Afficher b

a. On fait fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$:

	$b - a$	$b - a > r$	m	$f(m)$	$f(m) > 0$	a	b
Initiali- sation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2	0,025	oui	3,0375	0,218	oui	3,0375	3,05
étape 3	0,0125	oui	3,04375	0,082	oui	3,04375	3,05
étape 4	0,00625	non					

b. Cet algorithme permet de donner un encadrement de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie.

On peut donc dire que le nombre α appartient à l'intervalle $[3,04375; 3,05]$.