

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Aucune explication n'était demandée dans cet exercice.

1. d. 38 %

Augmenter de 20 % c'est multiplier par 1,20 ; augmenter de 15 % c'est multiplier par 1,15. Augmenter de 20 % puis de 15 %, c'est multiplier par $1,20 \times 1,15 = 1,38$ donc c'est augmenter de 38 %.

2. c. Courbe 3

En comparant le sens de variation de f et le signe des fonctions proposées comme dérivées, on peut éliminer les courbes 1 et 4. La tangente à $\mathcal{C}$ passant par A a pour coefficient directeur 1 ce qui permet d'éliminer la courbe 2.

3. b. $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

On applique les formules $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

4. a. $S = 2 \times \frac{1 - 1,05^{12}}{1 - 1,05}$

La somme des premiers termes d'une suite géométrique est $u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$.

5. c. 0,48

On obtient ce résultat à la calculatrice.

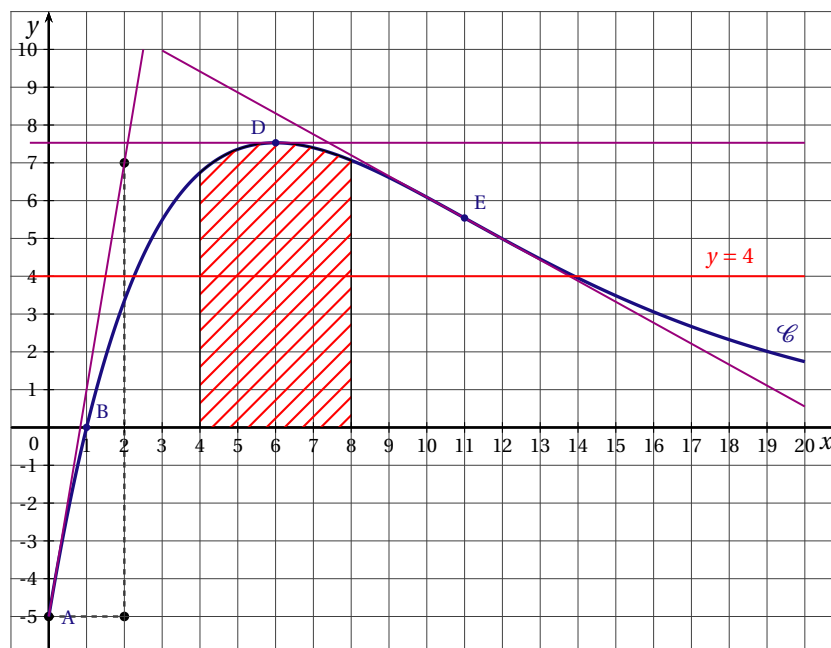
EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ aux points A, D et E d'abscisses respectives 0, 6 et 11.



1. $f(0) = -5$ (point A) ; $f(1) = 0$ (point B) ; $f'(0) = \frac{12}{2} = 6$ et $f'(6) = 0$ (point D)
2. La courbe $\mathcal{C}$ semble avoir le point E comme point d'inflexion.
3. $I = \int_4^8 f(x) dx$; $28 \leq I \leq 32$; c'est l'aire de la partie hachurée en rouge sur le graphique.
4. L'équation $f(x) = 4$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[2; 3]$ et l'autre dans l'intervalle $[13; 14]$.
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = 4$.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$.

1. $f'(x) = 5 \times e^{-0,2x} + (5x - 5) \times (-0,2e^{-0,2x}) = 5e^{-0,2x} - xe^{-0,2x} + e^{-0,2x} = 6e^{-0,2x} - xe^{-0,2x}$
 $= (-x + 6)e^{-0,2x}$
2. a. Pour tout réel x , $e^{-0,2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x + 6$.
 $-x + 6 > 0 \iff 6 > x \iff x < 6$ donc :
 - $f'(x) > 0$ sur $[0; 6[$;
 - $f'(6) = 0$;
 - $f'(x) < 0$ sur $]6; 20]$.
- b. $f(0) = -5e^0 = -5$; $f(6) = (5 \times 6 - 5)e^{-0,2 \times 6} = 25e^{-1,2} \approx 7,53$; $f(20) = (5 \times 20 - 5)e^{-4} = 95e^{-4} \approx 1,74$; d'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	6	20
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-5	$25e^{-1,2}$	$95e^{-4}$

3. On complète le tableau de variations de la fonction f :

x	0	α	6	20
$f(x)$	-5	4	$25e^{-1,2}$	$95e^{-4}$

D'après ce tableau de variations, on peut conclure que l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 6]$.

En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice :

$$\left. \begin{array}{l} f(2,2562) \approx 3,99998 < 4 \\ f(2,2563) \approx 4,00022 > 4 \end{array} \right\} \implies \alpha \in [2,2562; 2,2563]$$

donc la valeur arrondie au millièm de α est 2,256.

4. a. Soit F la fonction définie sur $[0; 20]$ par $F(x) = (-25x - 100)e^{-0,2x}$.
 $F'(x) = (-25) \times e^{-0,2x} + (-25x - 100) \times (-0,2e^{-0,2x}) = -25e^{-0,2x} + 5xe^{-0,2x} + 20e^{-0,2x}$
 $= -5e^{-0,2x} + 5xe^{-0,2x} = (5x - 5)e^{-0,2x} = f(x)$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0; 20]$.

- b. La valeur moyenne de la fonction f sur $[4; 8]$ est $M = \frac{1}{8-4} \int_4^8 f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \int_4^8 f(x) dx &= F(8) - F(4) = ((-25 \times 8 - 100)e^{-0,2 \times 8}) - ((-25 \times 4 - 100)e^{-0,2 \times 4}) \\ &= -300e^{-1,6} - (-200e^{-0,8}) = 200e^{-0,8} - 300e^{-1,6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } M = \frac{1}{4} (200e^{-0,8} - 300e^{-1,6}) = 50e^{-0,8} - 75e^{-1,6}$$

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0; 20]$. La fonction f modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros.

1. On admet que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6; 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903 ; on intègre cette information dans le tableau de variations de f :

x	0	α	6	β	20
$f(x)$	-5	4	$25e^{-1,2}$	4	$95e^{-4}$

D'après ce tableau de variations, $f(x) \geq 4$ pour $x \in [\alpha; \beta]$.

Pour que l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 4 000 € il faut déterminer x pour que $f(x) \geq 4$, c'est-à-dire pour $\alpha \leq x \leq \beta \iff 2,256 \leq x \leq 13,903$. Comme x désigne des centaines d'objets, il faut que le nombre d'objets produits soit compris entre 226 et 1 390.

2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets, ce qui correspond à $x \in [4; 8]$.

La valeur moyenne du bénéfice est donnée par :

$$\frac{1}{8-4} \int_4^8 f(x) dx \times 1000 = (50e^{-0,8} - 75e^{-1,6}) \times 1000 \approx 7324,2.$$

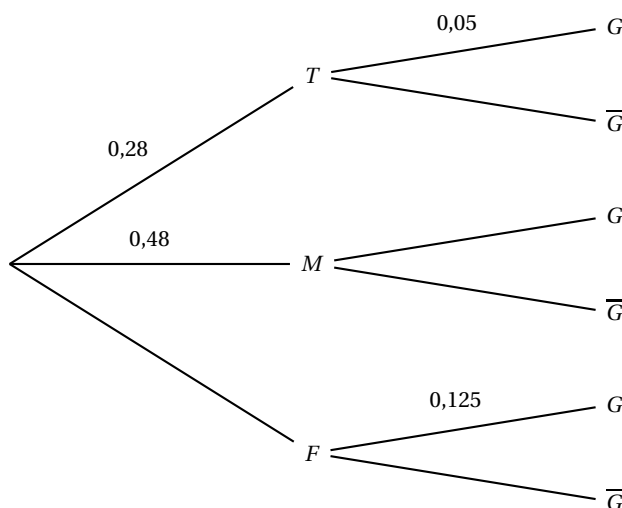
La valeur moyenne du bénéfice est 7 324 €.

EXERCICE 3

5 points

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. On construire un arbre pondéré indiquant les données de l'énoncé :



2. L'ensemble $\{T; M; F\}$ forme une partition de l'ensemble des acheteurs donc $P(T) + P(M) + P(F) = 1$; et donc $P(F) = 1 - P(T) - P(M) = 1 - 0,28 - 0,48 = 0,24$
 $P(F \cap G) = P(F) \times P_F(G) = 0,24 \times 0,125 = 0,03$
3. On sait que 12 % des acheteurs ont choisi un ordinateur portable avec une extension de garantie donc $P(M \cap G) = 0,12$; $P_M(G) = \frac{P(M \cap G)}{P(M)} = \frac{0,12}{0,48} = 0,25$
 La probabilité qu'un acheteur ayant acquis un ordinateur portable souscrive une extension de garantie est 0,25.
4. D'après la formule des probabilités totales :
 $P(G) = P(T \cap G) + P(M \cap G) + P(F \cap G) = 0,28 \times 0,05 + 0,12 + 0,03 = 0,164$

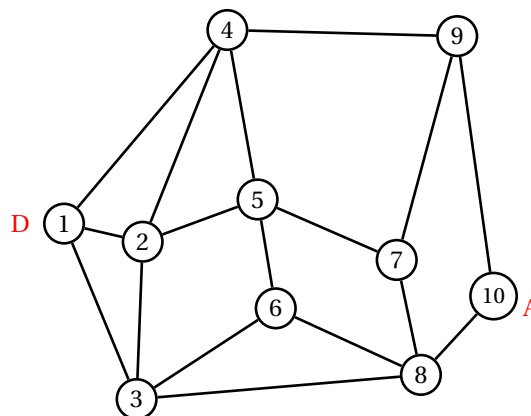
5. S'il y a 1 000 appareils vendus, le vendeur peut espérer $1\,000 \times 0,164 = 164$ extensions de garanties ce qui rapporte $164 \times 50 = 8\,200$ euros.

EXERCICE 3**5 points****Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux. La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre. Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables. Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.

Légende :

- | | |
|-----------------------|-------------------|
| ① Départ | ② Passerelle |
| ③ Roche percée | ④ Col des 3 vents |
| ⑤ Pic rouge | ⑥ Refuge |
| ⑦ Col vert | ⑧ Pont Napoléon |
| ⑨ Cascade des anglais | ⑩ Arrivée |



1. Un itinéraire allant de D à A passant par tous les sommets du graphe une seule fois est :

① – ③ – ② – ④ – ⑤ – ⑥ – ⑧ – ⑦ – ⑨ – ⑩

2. Un chemin qui passe une fois et une seule par toutes les arêtes d'un graphe est un chemin « eulérien ». On cherche donc un chemin eulérien qui part de D pour arriver à A.

Il faut pour cela que tous les sommets du graphe soient de degré pair, sauf le sommet ① et le sommet ⑩ ; ce n'est pas le cas donc il n'existe pas d'itinéraire allant de D à A utilisant tous les sentiers une seule fois.

3. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe, les sommets étant pris dans l'ordre. On donne M^5 :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 56 & 78 & 75 & 82 & 59 & 57 & 54 & 40 & 26 & 31 \\ 78 & 88 & 95 & 89 & 96 & 57 & 50 & 65 & 48 & 30 \\ 75 & 95 & 68 & 68 & 77 & 68 & 46 & 73 & 52 & 23 \\ 82 & 89 & 68 & 62 & 98 & 49 & 29 & 79 & 67 & 13 \\ 59 & 96 & 77 & 98 & 50 & 82 & 80 & 40 & 24 & 46 \\ 57 & 57 & 68 & 49 & 82 & 36 & 25 & 68 & 49 & 16 \\ 54 & 50 & 46 & 29 & 80 & 25 & 10 & 73 & 60 & 5 \\ 40 & 65 & 73 & 79 & 40 & 68 & 73 & 32 & 14 & 48 \\ 26 & 48 & 52 & 67 & 24 & 49 & 60 & 14 & 6 & 39 \\ 31 & 30 & 23 & 13 & 46 & 16 & 5 & 48 & 39 & 2 \end{pmatrix}$$

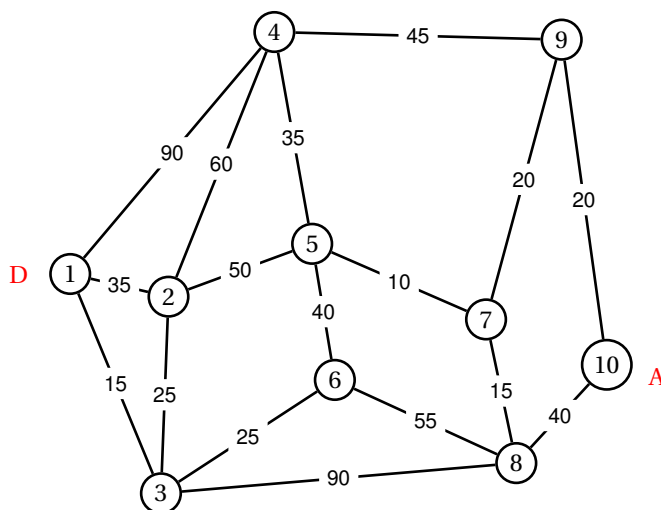
- a. Le nombre 89 situé sur la deuxième ligne et la quatrième colonne donne le nombre de chemins de longueur 5 (la puissance de la matrice M) reliant le sommet ② (deuxième ligne) au sommet ④ (quatrième colonne).

- b. D se trouve au sommet ① et A se trouve au sommet ⑩ ; on va donc chercher tous les chemins de longueur 5 qui vont du sommet ① au sommet ⑩ : c'est le nombre situé sur la matrice M^5 à la ligne 1 et en colonne 10.

Il y a donc 31 itinéraires allant de D à A empruntant 5 sentiers.

Un de ceux passant par le pic rouge est : ① – ② – ⑤ – ⑦ – ⑧ – ⑩

4. On a complété ci-dessous le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.



On va déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	1
	35 (1)	15 (1)	90 (1)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3 (1)
	40 (3) 35 (1)		90 (1)	∞	40 (3)	∞	105 (3)	∞	∞	2 (1)
			95 (2) 90 (1)	85 (2)	40 (3)	∞	105 (3)	∞	∞	6 (3)
			90 (1)	85 (2) 80 (6)		∞	105 (3) 95 (6)	∞	∞	5 (6)
			115 (5) 90 (1)			90 (5)	95 (6)	∞	∞	4 (1)
						90 (5)	95 (6)	135 (4)	∞	7 (5)
							105 (7) 95 (6)	135 (4) 110 (7)	∞	8 (6)
								110 (7)	135 (8)	9 (7)
									135 (8) 130 (9)	10 (9)

L'itinéraire le plus court en temps allant de D à A est de 130 minutes :

$$D - \textcircled{1} \xrightarrow{15} \textcircled{3} \xrightarrow{25} \textcircled{6} \xrightarrow{40} \textcircled{5} \xrightarrow{10} \textcircled{7} \xrightarrow{20} \textcircled{9} \xrightarrow{20} \textcircled{10} - A$$

EXERCICE 4

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

- 80 % de CDI (contrat à durée indéterminée)
- 20 % de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Le pourcentage de CDI sur le site de production A est : $\frac{315}{421} \times 100 = 75\%$.
Le pourcentage de CDI sur le site de production B est : $\frac{52}{68} \times 100 \approx 76,471\%$.
2. Pour une proportion p et un échantillon de taille n , l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Pour $p = 0,8$ et $n = 421$, on trouve :

$$I_A = \left[0,8 - 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{421}} ; 0,8 + 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{421}} \right] \approx [0,761 ; 0,838]$$

Pour $p = 0,8$ et $n = 68$, on trouve :

$$I_B = \left[0,8 - 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{68}} ; 0,8 + 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{68}} \right] \approx [0,704 ; 0,895]$$

3. Pour le site de production A, le pourcentage de CDI de 75 % n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_A ; on peut dire que la proportion de CDI n'est pas respectée sur le site de production A.

Pour le site de production B, le pourcentage de CDI de 76,471 % appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique I_B ; on peut dire que la proportion de CDI est respectée sur le site de production B.

Partie B

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. Si le responsable prélève un échantillon de 50 composants, on a $n = 50$ et $p = 0,07$ donc $n \geq 30$ mais $np = 3,5 < 5$ donc on ne peut pas utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
2. Si le responsable prélève un échantillon de 100 composants, on a $n = 100$ et $p = 0,07$ donc $n \geq 30$, $np = 7 \geq 5$ et $n(1-p) = 93 \geq 5$ donc on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique.
3. D'après la question précédente, on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % pour $n = 100$ et $p = 0,07$:

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,07 - 1,96 \frac{\sqrt{0,07 \times 0,93}}{\sqrt{100}} ; 0,07 + 1,96 \frac{\sqrt{0,07 \times 0,93}}{\sqrt{100}} \right] \approx [0,020 ; 0,120] \end{aligned}$$

La fréquence observée $\frac{9}{100} = 0,09$ appartient à l'intervalle de fluctuation I donc on peut dire que l'échantillon respecte les contraintes de la chaîne de production.