

🌀 Baccalauréat STL Métropole 14 septembre 2010 🌀
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

EXERCICE 1

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 2z\sqrt{6} + 8 = 0.$$

2. On considère les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -z_A \quad \text{et} \quad z_C = 2 - 2i.$$

- a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A , z_B et z_C .
 - b. En déduire que les points A, B et C appartiennent à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
 - c. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
 - d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la nature du triangle ABC.
3. a. Écrire les nombres complexes z_B et z_C sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$.
- b. Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{12}$. Quelle est l'image du point B par la rotation $\mathcal{R}$? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

4 points

On note y une fonction de la variable x , définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$\frac{1}{4}y'' + y = 0.$$

2. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation (E), qui vérifie les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = \sqrt{3}$$

Montrer que, pour tout nombre réel x , $f(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x)$.

3. Vérifier que, pour tout nombre réel x , on a : $f(x) = -\sqrt{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne m de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

PROBLÈME**11 points**

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 1 - 2e^{-2x} + 5e^{-x}.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2 cm).

Partie A

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. En remarquant que, pour tout nombre réel x , $f(x) = e^{-x}(-2e^{-x} + 5 + xe^x - e^x)$, déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x - 1$.
 - a. Prouver que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
 - b. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
4. Montrer que $f(\ln 4) = \frac{1}{8} + \ln 4$.

Partie B

1. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = \frac{(e^x - 4)(e^x - 1)}{e^{2x}}$.
 - b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x .
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
3. Tracer la droite $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 2 cm).

Partie C

1. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.
3. Calculer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie E du plan en unités d'aire. En déduire la valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 .