

∞ Baccalauréat STL Métropole 18 juin 2010 ∞
Chimie de laboratoire et de procédés industriels

Calculatrice et formulaire autorisés

3 heures

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

EXERCICE 1

4 points

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 25y = 0,$$

où y est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

2. Déterminer la fonction f , solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les conditions suivantes : $f(\pi) = -\sqrt{3}$ et $f'(\pi) = 5$.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel t , $f(t) = 2 \cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$.
4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2 \cos x = 1$.
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(t) = 1$.

EXERCICE 2

5 points

Un conteneur contient 100 flacons de même capacité, remplis d'une solution liquide contenant un produit P et dosée de la manière suivante :

- 5 flacons sont remplis d'une solution dosée à 10 % du produit P ;
- 30 flacons sont remplis d'une solution dosée à 20 % du produit P ;
- 40 flacons sont remplis d'une solution dosée à 30 % du produit P ;
- 20 flacons sont remplis d'une solution dosée à 40 % du produit P ;
- 5 flacons sont remplis d'une solution dosée à 50 % du produit P.

On tire au hasard un flacon du conteneur. On admet que tous les flacons ont la même probabilité d'être tirés.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'un flacon, associe le nombre exprimant le pourcentage de la solution contenue dans ce flacon. Ainsi, si on tire l'un des cinq flacons dont le contenu est dosé à 10 %, X prend la valeur 10.

1. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X .
3. Déterminer le dosage de la solution obtenue en mélangeant le contenu des 100 flacons dans un même récipient.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le produit P étant toujours dosé soit à 10 %, soit à 20 %, soit à 30 %, soit à 40 %, soit à 50 %, on souhaite obtenir $E(X) = 29,2$ en modifiant le dosage de la solution contenue dans un seul des flacons. Proposer une manière de parvenir à ce résultat.

PROBLÈME**11 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 (on rappelle que la limite de $x \ln x$ lorsque x tend vers 0 est 0).
2. Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = x^2 \left(\frac{3}{2} - \ln x \right) + 1.$$

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

3. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

a. Calculer $f'(x)$.

Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = 2x(1 - \ln x).$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Donner le tableau de variation de la fonction f . Indiquer les limites en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur de l'extremum de la fonction f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $[4 ; 5]$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

6. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (faire figurer sur le tracé le point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse α).

7. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{11}{18}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln x + x.$$

Vérifier que la fonction g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

8. On considère le domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 4$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.

Donner une valeur approchée de $\mathcal{A}$ au centième.