

∞ Baccalauréat STL Métropole 18 juin 2010 ∞
Physique de laboratoire et de procédés industriels

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

EXERCICE 1

4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique est égale à 1 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 16 = 0.$$

2. On considère les points du plan A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 2 - 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_B = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

Déterminer le module et un argument des nombres z_A et z_B .

3. a. Soit le point C d'affixe $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$.
Montrer que les points A, B, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.
- b. Construire le cercle $\mathcal{C}$ et les points A, B, C. (On laissera apparaître les traits de construction)
4. Soit le point D d'affixe $z_D = 4i$. Montrer que le point D a pour image le point C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
5. Montrer que le point E, image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$, appartient au cercle $\mathcal{C}$. Placer le point E sur le graphique.

EXERCICE 2

5 points

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme de fraction.

Une urne contient des boules de couleur numérotées.

- Une boule blanche numérotée ①, que l'on notera B1,
- Deux boules rouges numérotées ② et ③, que l'on notera R2 et R3
- Trois boules vertes numérotées ①, ② et ③, que l'on notera V1, V2 et V3.

Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait une boule de l'urne, puis une deuxième, sans avoir remis la première dans l'urne. On appelle résultat un couple dont le premier élément est la boule obtenue au premier tirage, et le second celle obtenue au second tirage.
Par exemple (R2; V3) est un résultat; il signifie que la première boule est rouge numérotée ② et que la deuxième boule est verte numérotée ③.
Pour répondre aux questions posées, on pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau.
- a. Déterminer le nombre de résultats possibles.
- b. On admet que tous les tirages sont équiprobables. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
- A : « Les deux boules sont de la même couleur. »

B : « Le produit des numéros inscrits sur les boules est 6. »

C : « Il y a au moins une boule blanche. »

2. Un jeu consiste à tirer 2 boules de l'urne, selon la méthode décrite dans la question 1.

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque résultat, le produit des numéros inscrits sur les deux boules.

Exemple : on associe au tirage $(B1; V2)$ le nombre 2 car $1 \times 2 = 2$.

- Donner toutes les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X .
- Montrer que la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 9 est égale à $\frac{1}{15}$.
- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous forme de tableau.
- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

PROBLÈME

11 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x.$$

On note g' la fonction dérivée de la fonction g .

1. À l'aide du tableau de signes de la fonction g' sur l'intervalle $]0; +\infty[$, indiquer les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+

2. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.

Partie B : Étude d'une fonction

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}.$$

et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
 - Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction dérivée f' de la fonction f est définie par :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}.$$

En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif.

- Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ une solution unique notée α .
 b. Donner, en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,01 du nombre réel α .
4. Déterminer une équation de la droite T tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.
 a. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
 b. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point B d'abscisse $e^{\frac{1}{2}}$.
 c. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
6. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm) les droites T et $\mathcal{D}$, ainsi que la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C : calcul d'une aire

1. Hachurer sur le graphique la partie E du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = e^{\frac{1}{2}}$ et $x = e$.
2. a. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 c. Montrer que la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée E est, en unités d'aire,

$$\mathcal{A} = \frac{2e^2 + 6e - 8e^{\frac{1}{2}} + 1}{8}.$$

En déduire une valeur arrondie à 10^{-2} de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 .