

Durée : 4 heures

A. P. M. E. P.

∞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ∞

15 novembre 2010

EXERCICE 1

7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$

- ★ si pour tout $x \in [a ; b]$ $u(x) \geq 0$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$
- ★ $\int_a^b [u(x) + v(x)] dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx$
- ★ $\int_a^b \alpha u(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

PARTIE B :

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
b. Calculer $\varphi(e)$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; e]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x .
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}.$$

On note f' la fonction dérivée de f .

- a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(1 + x^2)^2}$.
- b. Dédire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
- c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1 ; +\infty[$ on a :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x^2}.$$

- d. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.
- b. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.
Soit $\mathcal{A}$ l'aire exprimée en cm^2 du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
Déterminer un encadrement de $\mathcal{A}$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_C = \sqrt{3} + i.$$

1. a. Écrire z_A , z_B et z_C sous forme exponentielle.
b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. a. Écrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
b. En déduire la nature du triangle ABC.
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians.
a. Montrer que le point O' , image de O par r , a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.
b. Démontrer que les points C et O' sont diamétralement opposés sur le cercle Γ .
c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r .
d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. a. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = |z + \sqrt{3} + i|.$$

- b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E) .

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe

$$z' = (1 + i\sqrt{3})\bar{z}$$

où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

Soient les points A et B d'affixes respectives $z_A = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ et $z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}$.
On note A' et B' les images respectives des points A et B par f .

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Écrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

- b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.
 - c. En déduire la nature du triangle OA'B'.
 - d. Montrer que l'affixe $z_{A'}$ de A' vérifie l'égalité : $z_{A'} = 2z_A$.
En déduire la construction de A' et B'.
2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, et s la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{u})$. On pose $g = r \circ s$.
- a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g .
 - b. Montrer que les points O et A sont invariants par g .
 - c. En déduire la nature de la transformation g .
3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.
- b. Sur la figure placée en ANNEXE, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f .

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
- a. Vérifier que $P(X = 0) = \frac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
 - c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, on ne la remet pas.
- a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
B : « seule la première boule tirée est verte »,
C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
 - b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée?

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathcal{P}$ est le plan passant par A(3 ; 1 ; 2) et de vecteur normal $\vec{n}(1; -4; 1)$;

$\mathcal{D}$ est la droite passant par B(1 ; 4 ; 2) de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 3)$.

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1; 9; 0)$ passant par A.

1. Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

- a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
 - b. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
2. Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
 - a. Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathcal{P}$.
 - b. Calculer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
3. Intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
 - b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.
 - c. En déduire que la droite $\mathcal{D}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

ANNEXE

EXERCICE 2

Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie

