

Durée : 4 heures

Baccalauréat S La Réunion 22 juin 2010

EXERCICE 1**6 points****Commun à tous les candidats**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1.
 - a. Étudier le sens de variation de la fonction f .
 - b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - x.$$

- a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$.
- b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- c. Étudier le sens de variation de la fonction g , puis dresser le tableau de variations de la fonction g .
- d. Montrer que sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β , avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2; 3]$.
- e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , $2 \leq u_n \leq \beta$.
2. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats**

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1.
 - a. Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
 - b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats**

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}.$$

1. Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = e^{2x}.$$

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui vérifient la condition (E).
3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.
2. a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$.
- b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Partie I : Restitution organisée de connaissances

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c .

On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) \pmod{2\pi}$.

Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \pmod{2\pi}$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe $1 + i$.

On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe

$$z' = \frac{z-1-i}{z}.$$

Le point M' est appelé le point image du point M.

1. a. Déterminer, sous forme algébrique, l'afixe du point B' , image du point B d'afixe i .
b. Montrer que, pour tout point M du plan d'afixe z non nulle, l'afixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'afixe z non nulle pour lesquels l'afixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'afixe z non nulle pour lesquels l'afixe du point M' est un nombre réel?

EXERCICE 4**5 points****Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité****Partie I : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Prérequis :

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = B$ et $s(C) = D$.

Partie II

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$;

$$(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

On considère le point C tel que $ABCD$ est un carré.

Soit E le milieu du segment $[AD]$, on considère le carré $EDGF$ tel que

$$(\vec{ED}, \vec{EF}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].$$

1. a. Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G . On complètera la figure au cours de l'exercice.
b. Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g , affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G .
c. Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(D) = F$ et $s(B) = D$.
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s .
a. Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s .
b. Donner l'écriture complexe de cette similitude.
c. Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s .