

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Nord 3 juin 2010 ∞

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

$$A(1; -2; 4) \quad B(-2; -6; 5) \quad C(-4; 0; -3).$$

1. (a) Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
(b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(1; -1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
(c) Déterminer une équation du plan (ABC).
2. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).
(b) Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).
3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC).
Soit t le réel tel que $\vec{BH} = t\vec{BC}$.
(a) Démontrer que $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$.
(b) En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

EXERCICE 2

3 points

Commun à tous les candidats

Une urne contient des boules indiscernables au toucher.

20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges.

Les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. On a tiré une boule au hasard. Elle est rouge.

Montrer que la probabilité qu'elle porte le numéro 2 est égale à $\frac{2}{7}$.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise (après chaque tirage la boule est remise dans l'urne).

- (a) Exprimer en fonction de n la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages.
- (b) Déterminer l'entier n à partir duquel la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge portant le numéro 1 au cours des n tirages est supérieure ou égale à 0,99.

EXERCICE 3**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1 .

On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z ($z \neq i$) associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{2z - i}{iz + 1}.$$

- Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i)$.
- Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .
- (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.
(b) En déduire que pour tout point M d'affixe z ($z \neq i$) :

$$BM' \times AM = 1$$

$$\text{et } \left(\vec{u}, \overrightarrow{BM'}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

- (a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
(b) En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E' associé au point E par l'application f . On laissera apparents les traits de construction.
- Quelle est la nature du triangle BD' E' ?

EXERCICE 3**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A**

On cherche l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation

$$(E): 16x - 3y = 4.$$

- Vérifier que le couple $(1, 4)$ est une solution particulière de (E).
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la transformation f du plan, qui à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \sqrt{2} e^{\frac{3i\pi}{8}} z.$$

On définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :

le point M_0 a pour affixe $z_0 = i$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On note z_n l'affixe du point M_n

Les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 sont placés sur la figure donnée en annexe page 6.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f .
2. On note g la transformation $f \circ f \circ f \circ f$.
 - (a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g .
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $OM_{n+4} = 4OM_n$ et que

$$\left(\overrightarrow{OM_n}, \overrightarrow{OM_{n+4}} \right) = -\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$
 - (c) Compléter la figure en construisant les points M_4 , M_5 et M_6 .
3. Démontrer que pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\sqrt{2} \right)^n e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3n\pi}{8}\right)}$.
4. Soient deux entiers naturels n et p tels que $p \leq n$.
 - (a) Exprimer en fonction de n et p une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_p}, \overrightarrow{OM_n} \right)$.
 - (b) Démontrer que les points O , M_p et M_n sont alignés si et seulement si $n - p$ est un multiple de 8.
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le point M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$. On pourra utiliser la partie A.

EXERCICE 4

8 points

Commun à tous les candidats

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}.$$

On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

1. Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.
2.
 - (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
 - (b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - (c) Démontrer que pour tout réel x , $0 < f_1(x) < 4$.
3.
 - (a) Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.
 - (b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point I_1 .
 - (c) Tracer la droite (T_1) .

4. (a) Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
(b) Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle $[0 ; \ln 7]$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n .

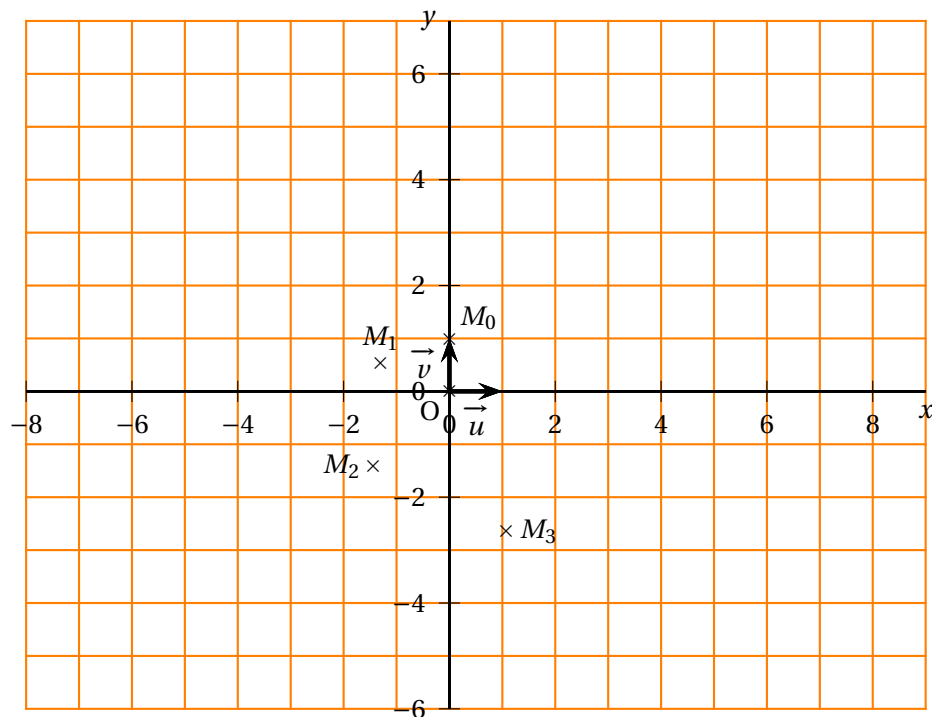
1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse.
On note I_n ce point d'intersection.
(b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n .
(c) Tracer les droites (T_2) et (T_3) .
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7} \int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x) \, dx.$$

Montrer que la suite (u_n) est constante.

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3 (enseignement de spécialité)



Exercice 4

