Corrigé et barème – Satellites et planètes : mouvement circulaire et lois de Kepler

Champ de gravitation d'un astre et choix du référentiel ; mouvement circulaire uniforme d'un satellite, vecteurs vitesse et accélération ; période de révolution et troisième loi de Kepler ; satellite géostationnaire ; les trois lois de Kepler sur une orbite elliptique ; données astronomiques et satellitaires testées en Python.

Durée : 120 min – Calculatrice autorisée – Sur 20 points · Spécialité Physique-Chimie Terminale

Exercice 1 – Un satellite d'observation ★★ *(4 pts)*

a) $r = R_T + h = 7\,720$ km $= 7{,}72 \times 10^6$ m, d'où $\mathcal{G} = \frac{3{,}98\times10^{14}}{(7{,}72\times10^6)^2} \approx \mathbf{6{,}68\ N\cdot kg^{-1}}$ (0,5 pt). Seule force : $m\,\vec{\mathcal{G}}$; deuxième loi de Newton, $m\,\vec{a} = m\,\vec{\mathcal{G}}$, donc $\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}$: $\mathbf{6{,}68\ m\cdot s^{-2}}$, dirigée vers le centre de la Terre (0,5 pt). (1)

b) Dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\,\vec{u}_n$ et $\vec{a} = \frac{G\,M_T}{r^2}\,\vec{u}_n$ (0,5 pt). Par identification, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$: la valeur de la vitesse est constante, le mouvement est **uniforme** (0,5 pt). Et $\frac{v^2}{r} = \frac{G\,M_T}{r^2}$ donne $v = \sqrt{\frac{G\,M_T}{r}}$ (0,5 pt). (1)

c) $v = \sqrt{\frac{3{,}98\times10^{14}}{7{,}72\times10^6}} \approx \mathbf{7{,}18 \times 10^3\ m\cdot s^{-1}}$ (0,5 pt). (1)

d) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\times7{,}72\times10^6}{7\,180} \approx 6\,756$ s $\approx 112{,}6$ min, soit **1 h 53 min** (0,5 pt). Avec $T = 9\,000$ s : $r = \left(\frac{G\,M_T\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx 9{,}35 \times 10^6$ m, d'où $h \approx \mathbf{2\,970\ km}$: une période plus longue impose une orbite plus haute (0,5 pt). (1)

Le point clé — L'altitude se convertit d'abord en rayon d'orbite ; ensuite la deuxième loi de Newton et le repère de Frenet donnent tout, sans la masse du satellite.

Exercice 2 – Uranus et ses satellites Titania et Obéron ★★ *(4 pts)*

a) $T = a^{3/2} = 19{,}2 \times \sqrt{19{,}2} \approx \mathbf{84{,}1\ ans}$ (0,5 pt). (1)

b) Titania et Obéron tournent autour du même astre : $\frac{T_O^2}{r_O^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$ (0,5 pt), d'où $T_O = 8{,}71 \times \left(\frac{5{,}84}{4{,}36}\right)^{1{,}5} \approx \mathbf{13{,}5\ jours}$ (0,5 pt). (1)

c) Orbite circulaire : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M}}$, donc $M = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2}$ (0,5 pt). $T = 8{,}71 \times 86\,400 \approx 7{,}53 \times 10^5$ s (0,5 pt). $M = \frac{4\pi^2\times(4{,}36\times10^8)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times(7{,}53\times10^5)^2} \approx \mathbf{8{,}66 \times 10^{25}\ kg}$ (0,5 pt). (1)

d) $\frac{8{,}66\times10^{25}}{5{,}97\times10^{24}} \approx \mathbf{14{,}5\ fois}$ (0,5 pt). $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\times4{,}36\times10^8}{7{,}525\times10^5} \approx \mathbf{3{,}64\ km\cdot s^{-1}}$ (0,5 pt). (1)

Le point clé — Pour deux corps du même astre, le rapport des périodes se calcule sans G ni M ; pour peser l'astre, il faut au contraire les unités SI.

Exercice 3 – Phobos et l'orbite aréostationnaire ★★★ *(4 pts)*

a) Seule force : l'attraction de Mars ; $m\,\vec{a} = G\,\frac{m\,M}{r^2}\,\vec{u}_n$ et, dans le repère de Frenet, $\frac{v^2}{r} = G\,\frac{M}{r^2}$: la masse m de Phobos se simplifie, $v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$ (0,5 pt). $G\,M \approx 4{,}28 \times 10^{13}$ m³·s^{-2}, donc $v = \sqrt{\frac{4{,}28\times10^{13}}{9{,}38\times10^{6}}} \approx$ **$2{,}14 \times 10^{3}$ m·s^{-1}** (0,5 pt). (1)

b) $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\times9{,}38\times10^{6}}{2\,137} \approx 2{,}76 \times 10^{4}$ s, soit **7 h 40 min** (0,5 pt). (1)

c) Phobos fait le tour en 7 h 40 min, Mars en 24 h 37 min : **Phobos tourne plus vite que la planète** (0,5 pt). Il dépasse le sol : on le voit **se lever à l'ouest**, contrairement au Soleil (0,5 pt). (1)

d) Orbite circulaire, dans le plan de l'équateur martien, parcourue dans le sens de rotation de Mars avec une période de 88 642 s (0,5 pt). $r = \left(\frac{G\,M\,T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{4{,}28\times10^{13}\times88\,642^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \approx$ **$2{,}04 \times 10^{7}$ m**, soit 20 430 km (0,5 pt). Altitude : $h = 20\,430 - 3\,390 \approx$ **17 040 km** (0,5 pt). (1)

Le point clé — Un satellite plus bas que l'orbite « stationnaire » tourne plus vite que la planète : vu du sol, il avance d'ouest en est plus vite que le paysage.

Exercice 4 – Une orbite elliptique ★★★ *(4 pts)*

a) $a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{6\,700 + 26\,800}{2} =$ **16 750 km** $= 1{,}675 \times 10^{7}$ m (0,5 pt). (1)

b) Troisième loi de Kepler avec le demi-grand axe (0,5 pt) : $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G\,M_T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}675\times10^{7})^3}{3{,}98\times10^{14}}} \approx 2{,}16 \times 10^{4}$ s, soit **6,00 h** (0,5 pt). (1)

c) Deuxième loi de Kepler, loi des aires (0,5 pt) : aux deux sommets du grand axe, $r_p\,v_p = r_a\,v_a$, donc $\frac{v_p}{v_a} = \frac{26\,800}{6\,700} =$ **4,00** (0,5 pt). (1)

d) La relation $v = \sqrt{GM_T/r}$ suppose une orbite **circulaire** : r constant, accélération purement centripète (0,5 pt). Sur l'ellipse, r varie, l'accélération a une coordonnée tangentielle et v change, 4 fois plus grande au périgée (0,5 pt). La deuxième loi de Newton reste valable partout : c'est elle qui conduit aux lois de Kepler (0,5 pt). (1)

Le point clé — Sur une ellipse, on garde la deuxième loi de Newton et les trois lois de Kepler ; on abandonne les formules du cercle.

Exercice 5 – Quatre affirmations à examiner ★★★ *(4 pts)*

a) **Faux**. Au sol, avec ce modèle, $\mathcal{G} = \frac{3{,}98\times10^{14}}{(6{,}38\times10^{6})^2} \approx 9{,}78$ N·kg^{-1} ; à 20 000 km d'altitude, $r = 26\,380$ km et $\mathcal{G} \approx 0{,}572$ N·kg^{-1}, 17 fois moins (0,5 pt). Le champ décroît en $\frac{1}{r^2}$: il n'est uniforme que sur un domaine petit devant le rayon de la Terre (0,5 pt). (1)

b) **Faux**. La troisième loi de Kepler vaut aussi pour les orbites elliptiques, avec le demi-grand axe a : des rapports égaux à 1 vérifient cette loi (0,5 pt), mais ne disent rien de la forme de l'orbite, que décrit la première loi (0,5 pt). (1)

c) **Faux**. Même astre central : $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 27^2$ (0,5 pt), donc $\frac{r_2}{r_1} = 27^{2/3} = 9$ (0,5 pt). (1)

d) **Vrai**. $r = 6\,680$ km (0,5 pt) et $v = \sqrt{\frac{3{,}98\times10^{14}}{6{,}68\times10^{6}}} \approx 7{,}72 \times 10^{3}$ m·s^{-1}, inférieure à 8 km·s^{-1} (0,5 pt). (1)

Le point clé — Chaque affirmation se tranche par une formule du cours : $r = R + h$, la loi en $1/r^2$, l'exposant $2/3$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).