

Devoir surveillé – Variables aléatoires à densité et loi normale

Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle et loi normale : chapitre d'approfondissement (programme de maths complémentaires), non exigible en spécialité

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Une loi à densité (4 pts)

- a) a) Une variable aléatoire X prend ses valeurs dans $[0 ; 3]$ et admet pour densité $f(x) = k(x + 1)$, avec $k > 0$. Montrer que $k = \frac{2}{15}$.
- b) b) Calculer $P(X \leq 1)$.
- c) c) Calculer $P(X \geq 2)$, arrondie au millième.
- d) d) Calculer $E(X)$.

Exercice 2 – Loi uniforme (4 pts)

- a) a) Le temps T , en secondes, d'ouverture d'une barrière suit la loi uniforme sur $[4 ; 16]$. Donner sa densité.
- b) b) Calculer $P(T < 7)$.
- c) c) Calculer $P(9 \leq T \leq 14)$, arrondie au millième.
- d) d) Calculer $E(T)$ et $\sigma(T)$, arrondi au centième.

Exercice 3 – Loi exponentielle (4 pts)

- a) a) La durée X , en années, avant la première réparation d'une machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,18$. Calculer $E(X)$, arrondie au centième.
- b) b) Calculer $P(X \leq 5)$, arrondie au millième.
- c) c) Calculer $P_{X>6}(X > 14)$, arrondie au millième, puis interpréter ce résultat en une phrase.
- d) d) Déterminer la médiane de X , arrondie au centième d'année.

Exercice 4 – Loi normale (4 pts)

- a) a) La résistance R , en ohms, d'un composant suit la loi $\mathcal{N}(500 ; 25^2)$. Calculer $P(R \leq 460)$, arrondie au millième.
- b) b) Calculer $P(470 \leq R \leq 540)$, arrondie au millième.
- c) c) Déterminer la valeur r telle que $P(R \leq r) = 0,99$, arrondie à l'unité.
- d) d) Déterminer l'intervalle centré en 500 auquel R appartient avec une probabilité d'environ 0,954.

Exercice 5 – Paramètre inconnu et analyse d’une erreur*(4 pts)*

- a) a) La température X , en degrés Celsius, d’un four suit la loi $\mathcal{N}(80; \sigma^2)$ et $P(X > 95) = 0,05$.
Montrer que $\sigma \approx 9,12$.
- b) b) Calculer $P(X < 70)$, arrondie au millième.
- c) c) Un élève écrit : « puisque $P(X > 95) = 0,05$, alors $P(X < 65) = 0,95$ ». Expliquer l’erreur commise et donner la valeur correcte de $P(X < 65)$.
- d) d) Déterminer le réel $t > 0$ tel que $P(80 - t \leq X \leq 80 + t) = 0,80$, arrondi au centième.

Bon courage !