

Corrigé et barème – Variables aléatoires à densité et loi normale

Lois à densité, loi uniforme, loi exponentielle et loi normale : chapitre d'approfondissement (programme de maths complémentaires), non exigible en spécialité

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Une loi à densité

(4 pts)

- a) $\int_0^3 k(x+1)dx = k[\frac{x^2}{2} + x]_0^3 = k(4,5 + 3) = 7,5k$; l'égalité $7,5k = 1$ donne $k = \frac{1}{7,5} = \frac{2}{15}$. (1)
- b) $P(X \leq 1) = \frac{2}{15}[\frac{x^2}{2} + x]_0^1 = \frac{2}{15} \times 1,5 = 0,2$. (1)
- c) $P(X \geq 2) = \frac{2}{15}[\frac{x^2}{2} + x]_2^3 = \frac{2}{15}(7,5 - 4) = \frac{7}{15} \approx 0,467$. (1)
- d) $E(X) = \frac{2}{15} \int_0^3 (x^2 + x)dx = \frac{2}{15}[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}]_0^3 = \frac{2}{15}(9 + 4,5) = 1,8$. (1)

Repère — Le paramètre d'une densité se détermine toujours par la condition d'aire totale égale à 1, jamais en testant une valeur particulière.

Exercice 2 – Loi uniforme

(4 pts)

- a) Densité constante $f(t) = \frac{1}{16-4} = \frac{1}{12}$ sur $[4; 16]$, nulle ailleurs. (1)
- b) $P(T < 7) = \frac{7-4}{12} = \frac{3}{12} = 0,25$. (1)
- c) $P(9 \leq T \leq 14) = \frac{14-9}{12} = \frac{5}{12} \approx 0,417$. (1)
- d) $E(T) = \frac{4+16}{2} = 10$ s ; $V(T) = \frac{12^2}{12} = 12$ donc $\sigma(T) = \sqrt{12} \approx 3,46$ s. (1)

À retenir — Avec une loi uniforme, toute probabilité est un quotient de longueurs : aucune intégrale n'est nécessaire.

Exercice 3 – Loi exponentielle

(4 pts)

- a) $E(X) = \frac{1}{0,18} \approx 5,56$ années. (1)
- b) $P(X \leq 5) = 1 - e^{-0,18 \times 5} = 1 - e^{-0,9} \approx 1 - 0,407 = 0,593$. (1)
- c) Par absence de mémoire, $P_{X>6}(X > 14) = P(X > 8) = e^{-1,44} \approx 0,237$: une machine en service depuis 6 ans a la même probabilité de tenir 8 ans de plus qu'une machine neuve. (1)
- d) $e^{-0,18m} = 0,5$ donne $m = \frac{\ln 2}{0,18} \approx 3,85$ année. (1)

Le point clé — La médiane d'une loi exponentielle est toujours inférieure à son espérance : la moitié des pannes surviennent avant la durée moyenne.

Exercice 4 – Loi normale

(4 pts)

- a) $\frac{460-500}{25} = -1,6$ donc $P(R \leq 460) = P(Z \leq -1,6) \approx 0,055$. (1)
- b) $\frac{470-500}{25} = -1,2$ et $\frac{540-500}{25} = 1,6$: $P \approx 0,945 - 0,115 = 0,830$. (1)
- c) Le seuil associé à 0,99 est $z \approx 2,326$, donc $r = 500 + 25 \times 2,326 \approx 558$ ohms. (1)
- d) C'est l'intervalle à deux écarts types : $[500 - 50; 500 + 50] = [450; 550]$. (1)

Attention — Dans la notation de la loi normale, le second nombre est la variance : ici l'écart type vaut 25, pas 625.

Exercice 5 – Paramètre inconnu et analyse d’une erreur*(4 pts)*

- a) $P(Z > \frac{15}{\sigma}) = 0,05$ donne $\frac{15}{\sigma} \approx 1,6449$, d’où $\sigma = \frac{15}{1,6449} \approx 9,12$. (1)
- b) $\frac{70-80}{9,12} \approx -1,097$ donc $P(X < 70) = P(Z < -1,097) \approx 0,136$. (1)
- c) L’élève confond l’événement contraire et l’événement symétrique : $1 - P(X > 95) = 0,95$ correspond à $P(X \leq 95)$, pas à $P(X < 65)$. Par symétrie autour de $\mu = 80,65 = 80 - 15$ et $95 = 80 + 15$, donc $P(X < 65) = P(X > 95) = 0,05$. (1)
- d) $P(-\frac{t}{\sigma} \leq Z \leq \frac{t}{\sigma}) = 0,80$ donne $\frac{t}{\sigma} \approx 1,2816$, donc $t \approx 1,2816 \times 9,12 \approx 11,69$ °C. (1)

Erreur fréquente — Événement contraire et événement symétrique par rapport à la moyenne sont deux choses différentes : un schéma de la courbe en cloche évite la confusion.