# Fonctions sinus et cosinus

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Analyse · Fonctions sinus et cosinus)

## La démarche face à une question de trigonométrie

**1. Je place les angles sur le cercle** : valeurs remarquables, angles associés, signe du sinus (ordonnée) et du cosinus (abscisse).

**2. Je réduis le travail** : période ($f(x+T)$), puis parité ($f(-x)$).

**3. Je dérive** avec $(\sin u)' = u'\cos u$ et $(\cos u)' = -u'\sin u$, puis je factorise.

**4. Je résous** les équations et inéquations par le cercle : deux familles en $+\,2k\pi$, puis tri des valeurs de $k$ selon l'intervalle.

**5. Je conclus en valeur exacte** : tableau de variations, extremum, ensemble des solutions.

**Le réflexe —** une réponse se donne en valeur exacte ($\frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$…) et une famille de solutions s'écrit avec « $k \in \mathbb{Z}$ » : écrire seulement « $x = \frac{\pi}{3}$ » quand on résout dans $\mathbb{R}$ ne rapporte pas tous les points.

## Cas 1 · Parité et période

**Réflexe —** je calcule f(−x) pour la parité, f(x + T) pour la période, avec T = 2π/ω pour cos(ωx + φ) ou sin(ωx + φ).

**Exemple.** Questions types : « Montrer que $f$ est impaire », « Montrer que $f$ est périodique de période $T$ », « Sur quel intervalle suffit-il d'étudier $f$ ? ». Exemple : $f(x) = 3\sin(4x)$.

Pour tout réel $x$ : $f(-x) = 3\sin(-4x) = -3\sin(4x) = -f(x)$, donc $f$ est impaire.
$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin(4x + 2\pi) = 3\sin(4x) = f(x)$ : $f$ est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.
On l'étudie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, la moitié d'une période, puis on complète par symétrie par rapport à l'origine et par translations.

**Attention —** un seul contre-exemple suffit pour prouver qu'une fonction n'est pas paire ; π n'est pas une période de sin.

## Cas 2 · Dériver

**Réflexe —** je repère u, je calcule u′, puis (sin u)′ = u′ cos u et (cos u)′ = −u′ sin u ; pour un produit, (uv)′ = u′v + uv′.

**Exemple.** Questions types : « Calculer $f'(x)$ », « Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $a$ ». Exemple : $f(x) = \sin(2x)\cos x$, tangente en 0.

Produit de $u(x) = \sin(2x)$, $u'(x) = 2\cos(2x)$, et de $v(x) = \cos x$, $v'(x) = -\sin x$.
$f'(x) = 2\cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x$.
$f(0) = 0$ et $f'(0) = 2 \times 1 \times 1 - 0 = 2$ : la tangente a pour équation $y = 2x$.

**Attention —** (cos(ax + b))′ = −a sin(ax + b) : le signe moins et le facteur a.

## Cas 3 · Variations de a + b sin x

**Réflexe —** je dérive, je lis le signe de sin x ou cos x sur le cercle, je place les valeurs exactes aux bornes.

**Exemple.** Questions types : « Dresser le tableau de variations de $f$ sur … », « Déterminer le maximum de $f$ ». Exemple : $f(x) = 1 + 2\sin x$ sur $[-\pi\,;\pi]$.

$f'(x) = 2\cos x$, du signe de $\cos x$ : négative sur $\left[-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$, positive sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, négative sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.
$f$ décroît de $f(-\pi) = 1$ à $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, croît jusqu'à $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3$, puis décroît jusqu'à $f(\pi) = 1$.
Maximum 3 en $\dfrac{\pi}{2}$, minimum $-1$ en $-\dfrac{\pi}{2}$.

**Attention —** un sens de variation se donne sur un intervalle, jamais « sur $\mathbb{R}$ » pour sin ou cos.

## Cas 4 · Résoudre cos x = a ou sin x = a

**Réflexe —** $|a| \leq 1$ ? angle α du tableau ; deux familles avec $+ 2k\pi$ ; je teste $k = -1, 0, 1\ldots$ pour l'intervalle.

**Exemple.** Questions types : « Résoudre dans $\mathbb{R}$ », « Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ ». Exemple : $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ dans $[0\,;2\pi[$.

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
$x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$.
Dans $[0\,;2\pi[$ : $k = 1$ dans la première famille donne $\dfrac{7\pi}{4}$, $k = 0$ dans la seconde donne $\dfrac{5\pi}{4}$. $S = \left\{\dfrac{5\pi}{4}\,;\dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

**Attention —** seconde famille : $-\alpha$ pour le cosinus, $\pi - \alpha$ pour le sinus.

## Cas 5 · Étudier une fonction, trouver un optimum

**Réflexe —** dériver, factoriser, résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle, lire le signe sur le cercle, tableau, extremums aux points critiques et aux bornes.

**Exemple.** Questions types : « Étudier les variations de $g$ », « En déduire la valeur maximale ». Exemple : $g(x) = 2\cos x + x$ sur $[0\,;2\pi]$.

$g'(x) = 1 - 2\sin x$, et $g'(x) \geqslant 0 \iff \sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Sur $[0\,;2\pi]$, $\sin x = \dfrac{1}{2}$ pour $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ; le sinus dépasse $\dfrac{1}{2}$ entre les deux. Donc $g$ croît sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{6}\right]$, décroît sur $\left[\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right]$, croît sur $\left[\dfrac{5\pi}{6}\,;2\pi\right]$.
Maximum local $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{6} \approx 2{,}256$ ; mais $g(2\pi) = 2 + 2\pi \approx 8{,}283$ est plus grand : le maximum sur $[0\,;2\pi]$ vaut $2 + 2\pi$, atteint à la borne.

**Attention —** comparer le maximum local avec les valeurs aux bornes.

## Les pièges

- La trigonométrie n'est pas linéaire : $\sin(a + b) \neq \sin a + \sin b$ et $\cos(2x) \neq 2\cos x$.
- $\cos x = \cos\alpha$ ne donne pas seulement $x = \alpha$ : il y a aussi $-\alpha$ et les $+ 2k\pi$.
- Pour $\cos(ax + b) = \ldots$, on divise aussi $2k\pi$ par a : les solutions sont plus nombreuses sur un intervalle donné.
- $\cos a = \pm\sqrt{(1 - \sin^2 a)}$ : c'est l'intervalle où se trouve a qui fixe le signe.
- Un facteur comme $1 + \cos x$ est positif mais s'annule en $\pi$ : signe large, pas strict.
- Les formules de dérivation supposent des radians : calculatrice en mode radian.

*Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).*