

Devoir surveillé – Trigonométrie — formules d'addition et fonctions

Formules d'addition et de duplication, équations trigonométriques, fonctions sinus et cosinus : chapitre d'approfondissement, non exigible en spécialité.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Valeurs exactes

(4 pts)

- Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
- Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
- En déduire, à l'aide d'une formule de duplication, la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$.
- Retrouver directement le résultat de la question précédente à l'aide du cercle trigonométrique.

Exercice 2 – Quatre équations

(4 pts)

- Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.
- Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.
- Pour résoudre $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$, un élève répond « $x = \frac{\pi}{7}$ ». Expliquer son erreur et donner l'ensemble des solutions.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

(4 pts)

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$. Montrer que f est impaire.
- Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 2\pi]$, en précisant les valeurs exactes.
- En déduire le maximum de f sur $[0; 2\pi]$ et le réel où il est atteint.

Exercice 4 – Température sous une serre

(4 pts)

- Sous une serre, la température, en degrés Celsius, est modélisée pour $t \in [0; 24]$ (heures) par $T(t) = 18 + 6\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Calculer $T(0)$, $T(6)$ et $T(18)$.
- Montrer que $T'(t) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$, puis étudier son signe sur $[0; 24]$.
- Dresser le tableau de variations de T et donner les températures extrêmes de la journée, avec les heures correspondantes.
- Déterminer la durée totale pendant laquelle la température est supérieure ou égale à 21°C .

Exercice 5 – Formules et démonstration*(4 pts)*

- a) Montrer que pour tous réels a et b : $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$.
- b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
- c) Montrer que pour tout réel x : $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.
- d) Un élève affirme que pour tout réel x , $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x + 1$. Donner un contre-exemple, puis énoncer la formule correcte.

Bon courage !