

Corrigé et barème – Trigonométrie — formules d'addition et fonctions

Formules d'addition et de duplication, équations trigonométriques, fonctions sinus et cosinus : chapitre d'approfondissement, non exigible en spécialité.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Valeurs exactes

(4 pts)

- a) $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, donc $\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \approx -0,966$. (1)
- b) $\sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx 0,259$. (1)
- c) $\frac{11\pi}{6} = 2 \times \frac{11\pi}{12}$, donc $\cos \frac{11\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{11\pi}{12} - 1 = 2 \times \frac{8+4\sqrt{3}}{16} - 1 = \frac{8+4\sqrt{3}}{8} - 1 = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (1)
- d) $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$, donc $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$: les deux méthodes concordent. (1)

À retenir — Un angle non remarquable se décompose presque toujours en somme ou différence de deux angles du tableau de référence.

Exercice 2 – Quatre équations

(4 pts)

- a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$, donc $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $[0; 2\pi[$: $S = \{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}$. (1)
- b) $3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, donc $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$. Dans $[0; 2\pi[$, six solutions : $S = \{\frac{\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{13\pi}{18}; \frac{17\pi}{18}; \frac{25\pi}{18}; \frac{29\pi}{18}\}$. (1)
- c) Avec $s = \sin x$: $2s^2 - 5s + 2 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$, racines $s = 2$ et $s = \frac{1}{2}$. La racine 2 est à rejeter car $\sin x \leq 1$. Reste $\sin x = \frac{1}{2}$: $S = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (1)
- d) Il oublie la seconde famille, opposée, et la périodicité : $\cos x = \cos \alpha$ équivaut à $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$. Ici $S = \{\frac{\pi}{7} + 2k\pi; -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. (1)

Erreur fréquente — Une équation trigonométrique posée sur $\mathbb{R}$ a deux familles de solutions, jamais une seule valeur isolée.

Exercice 3 – Étude d'une fonction

(4 pts)

- a) $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x) = -\sin(2x) + 2\sin x = -f(x)$ pour tout réel x : f est impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. (1)
- b) $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - \cos x - 1)$. Le trinôme en $\cos x$ a pour racines 1 et $-\frac{1}{2}$, donc $2\cos^2 x - \cos x - 1 = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$ et $f'(x) = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$. (1)
- c) $\cos x - 1 \leq 0$ toujours, donc f' est du signe opposé à $2\cos x + 1$, positif pour $\cos x > -\frac{1}{2}$. Sur $[0; 2\pi]$: f décroît sur $[0; \frac{2\pi}{3}]$ de 0 à $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, croît sur $[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}]$ jusqu'à $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, puis décroît jusqu'à $f(2\pi) = 0$. (1)
- d) Les valeurs candidates sont $f(0) = 0$, $f(\frac{4\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$ et $f(2\pi) = 0$. Le maximum vaut donc $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, atteint en $x = \frac{4\pi}{3}$. (1)

Le point clé — Une dérivée trigonométrique se factorise presque toujours en posant $X = \cos x$ ou $X = \sin x$ et en résolvant un trinôme.

Exercice 4 – Température sous une serre

(4 pts)

- a) $T(0) = 18 + 6 \sin 0 = 18$; $T(6) = 18 + 6 \sin \frac{\pi}{2} = 24$; $T(18) = 18 + 6 \sin \frac{3\pi}{2} = 18 - 6 = 12$ (en °C). (1)
- b) $T'(t) = 6 \times \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Comme $\frac{\pi}{2} > 0$, le signe est celui de $\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$: positif pour $t \in [0; 6]$ et $t \in [18; 24]$, négatif pour $t \in [6; 18]$. (1)
- c) T croît de 18 à 24 sur $[0; 6]$, décroît jusqu'à 12 sur $[6; 18]$, puis remonte à 18 sur $[18; 24]$. Le maximum est 24 °C à 6 h, le minimum 12 °C à 18 h. (1)
- d) $T(t) \geq 21 \iff \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) \geq \frac{1}{2}$. En posant $\theta = \frac{\pi t}{12} \in [0; 2\pi]$, cela équivaut à $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$, soit $t \in [2; 10]$: la durée est de 8 heures. (1)

Repère — Dans un modèle $A + B \sin(\omega t)$, le nombre A donne la valeur moyenne et B l'amplitude des écarts autour d'elle.

Exercice 5 – Formules et démonstration

(4 pts)

- a) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En additionnant, les termes en $\sin a \sin b$ s'éliminent et il reste $2 \cos a \cos b$. (1)
- b) On cherche a et b avec $a + b = \frac{5\pi}{8}$ et $a - b = \frac{3\pi}{8}$: par somme et différence, $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{8}$. La formule donne $2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \times 0 \times \cos \frac{\pi}{8} = 0$. La somme vaut donc 0. (1)
- c) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$. Le second facteur vaut 1 et le premier est exactement $\cos(2x)$, d'où l'égalité. (1)
- d) Pour $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin \pi = 0$ alors que $\sin \frac{\pi}{2} + 1 = 2$; l'égalité est donc fausse. La formule correcte est $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \cos x$. (1)

Attention — Ajouter un angle ne revient jamais à ajouter son sinus ou son cosinus : seule la formule d'addition est valable.