

Devoir surveillé – Tests statistiques

Décider sous incertitude : hypothèse nulle, risque de première espèce, intervalles de fluctuation et de confiance — approfondissement hors programme de Tle.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Exercice 1 — Contrôle d'une annonce commerciale (4 pts)

- a) a) Un opérateur affirme que 18 % des appels de son service client durent plus de cinq minutes. Un organisme prélève au hasard $n = 750$ appels. Vérifier les conditions d'emploi de l'intervalle de fluctuation asymptotique et écrire les hypothèses du test bilatéral.
- b) b) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %, bornes arrondies à 10^{-5} .
- c) c) Sur l'échantillon, 163 appels dépassent cinq minutes. Conclure au seuil de 5 %.
- d) d) Exprimer la règle de décision en nombre d'appels de plus de cinq minutes.

Exercice 2 – Exercice 2 — Test unilatéral et p-valeur (4 pts)

- a) a) Un site marchand garantit que 96 % des commandes sont livrées dans les délais. Une association de consommateurs, qui soupçonne une proportion plus faible, suit $n = 450$ commandes tirées au hasard. Écrire les hypothèses, préciser la nature du test et nommer le risque que l'on contrôle.
- b) b) Établir la règle de décision au seuil de 5 %.
- c) c) L'association constate 421 livraisons dans les délais. Conclure.
- d) d) Calculer la p-valeur du test et indiquer la conclusion au seuil de 1 %.

Exercice 3 – Exercice 3 — Estimation, marge d'erreur et interprétation (4 pts)

- a) a) Une enquête nationale porte sur $n = 1\,250$ personnes tirées au sort ; 470 déclarent pratiquer une activité sportive hebdomadaire. Déterminer l'intervalle de confiance au niveau 95 %, bornes arrondies à 10^{-3} .
- b) b) Donner la marge d'erreur en points et vérifier la majoration $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- c) c) Déterminer la taille minimale d'échantillon garantissant une marge d'au plus 1,5 point, sans information préalable.
- d) d) Un article titre : « 95 % des Français pratiquent une activité sportive entre 34,9 % et 40,3 % du temps ». Expliquer l'erreur et proposer une formulation correcte.

Exercice 4 – Exercice 4 — Puissance d'un test (4 pts)

- a) a) On teste $H_0 : p = 0,45$ contre $H_1 : p \neq 0,45$ au seuil de 5 %, sur un échantillon de taille $n = 500$. Déterminer la zone d'acceptation, bornes arrondies à 10^{-5} .
- b) b) La proportion réelle vaut en fait $p = 0,52$. Calculer le risque de seconde espèce.
- c) c) En déduire la puissance du test et l'interpréter en une phrase.
- d) d) Déterminer la taille d'échantillon nécessaire pour porter cette puissance à 95 %, le seuil restant fixé à 5 %.

Exercice 5 – Exercice 5 — Deux enquêtes, une contradiction*(4 pts)*

- a) a) Une enquête en ligne, ouverte à qui veut y répondre, recueille 2 176 avis favorables sur 3 200 participants. Une enquête par tirage aléatoire recueille 354 avis favorables sur 600 personnes. Déterminer les deux intervalles de confiance au niveau 95 %, bornes arrondies à 10^{-3} .
- b) b) Les deux intervalles permettent-ils de conclure à une différence significative ? Justifier.
- c) c) Laquelle des deux enquêtes faut-il privilégier pour estimer l'opinion de la population ? Justifier en une phrase précise.
- d) d) Un commentateur écrit : « la première enquête porte sur plus de cinq fois plus de personnes, elle est donc cinq fois plus fiable ». Expliquer l'erreur.

Bon courage !