

Corrigé et barème – Tests statistiques

Décider sous incertitude : hypothèse nulle, risque de première espèce, intervalles de fluctuation et de confiance — approfondissement hors programme de Tle.

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Exercice 1 — Contrôle d'une annonce commerciale (4 pts)

- $n = 750 \geq 30$, $np = 135 \geq 5$, $n(1 - p) = 615 \geq 5$: conditions vérifiées. $H_0 : p = 0,18$ contre $H_1 : p \neq 0,18$, seuil 5 %. (1)
- $\sigma = \sqrt{\frac{0,18 \times 0,82}{750}} = \sqrt{0,0001968} \approx 0,0140285$; $1,96\sigma \approx 0,0274959$; $I \approx [0,15250 ; 0,20750]$. (1)
- $f = \frac{163}{750} \approx 0,21733 > 0,20750$: $f \notin I$, on rejette H_0 au seuil de 5 %. L'affirmation de l'opérateur est contredite par le relevé. (1)
- $750 \times 0,15250 = 114,4$ et $750 \times 0,20750 = 155,6$: on ne rejette pas H_0 si $115 \leq k \leq 155$, on rejette si $k \leq 114$ ou $k \geq 156$. (1)

Repère — On convertit les bornes de l'intervalle en effectifs entiers en resserrant vers l'intérieur : la zone d'acceptation ne contient que des entiers réellement compris entre les deux bornes.

Exercice 2 – Exercice 2 — Test unilatéral et p-valeur (4 pts)

- $H_0 : p = 0,96$ contre $H_1 : p < 0,96$: test unilatéral à gauche, le sens étant fixé avant l'expérience. Le risque contrôlé est le risque de première espèce : accuser le site à tort. Conditions : $450 \times 0,96 = 432 \geq 5$ et $450 \times 0,04 = 18 \geq 5$. (1)
- $\sigma = \sqrt{\frac{0,96 \times 0,04}{450}} = \sqrt{0,00008533} \approx 0,0092376$; quantile unilatéral 1,645 ; valeur critique $c = 0,96 - 1,645 \times 0,0092376 \approx 0,94480$. On rejette H_0 si $f < 0,94480$. (1)
- $f = \frac{421}{450} \approx 0,93556 < 0,94480$: on rejette H_0 au seuil de 5 %. Le taux de livraison à l'heure est significativement inférieur à la garantie annoncée. (1)
- $z = \frac{0,93556 - 0,96}{0,0092376} \approx -2,646$ donc p-valeur = $P(Z \leq -2,646) \approx 0,0040$. Comme $0,0040 \leq 0,01$, on rejette encore H_0 au seuil de 1 % : la conclusion est solide. (1)

Le point clé — Le sens d'un test unilatéral se décide avant de regarder les données, sans quoi le risque de première espèce annoncé n'est plus respecté.

Exercice 3 – Exercice 3 — Estimation, marge d'erreur et interprétation (4 pts)

- $f = \frac{470}{1250} = 0,376$; $nf = 470 \geq 5$ et $n(1 - f) = 780 \geq 5$. $\sqrt{\frac{0,376 \times 0,624}{1250}} = \sqrt{0,00018770} \approx 0,013700$; $1,96 \times 0,013700 \approx 0,026851$; $J \approx [0,349 ; 0,403]$. (1)
- $e \approx 0,0269$, soit environ 2,7 points. Majoration : $\frac{1}{\sqrt{1250}} \approx 0,02828$, et $0,0269 \leq 0,0283$: la majoration est bien vérifiée. (1)
- $n \geq \left(\frac{1,96}{2 \times 0,015}\right)^2 = \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 \approx (65,333)^2 \approx 4\,268,4$: il faut $n = 4\,269$ personnes, soit plus du triple de l'enquête initiale. (1)
- La phrase mélange deux niveaux : le pourcentage de Français concernés et le niveau de confiance de l'estimation ; « du temps » n'a aucun sens ici. Formulation correcte : « au niveau de confiance 95 %, la proportion de Français pratiquant une activité sportive hebdomadaire est comprise entre 34,9 % et 40,3 % ». (1)

Erreur fréquente — Le niveau de confiance porte sur la méthode d'estimation, jamais sur une proportion d'individus de la population.

Exercice 4 — Exercice 4 — Puissance d'un test

(4 pts)

- a) $\sigma = \sqrt{\frac{0,45 \times 0,55}{500}} = \sqrt{0,000495} \approx 0,0222486$; $1,96\sigma \approx 0,0436073$; zone d'acceptation $I \approx [0,40639 ; 0,49361]$. (1)
- b) Si $p = 0,52$: $\sigma' = \sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{500}} = \sqrt{0,0004992} \approx 0,0223428$. $\beta = P(0,40639 \leq F \leq 0,49361) \approx P(-5,08 \leq Z \leq -1,181) \approx 0,1188$, soit environ 0,12. (1)
- c) Puissance $= 1 - \beta \approx 0,88$: avec 500 individus, un écart réel de 7 points est détecté dans environ 88 % des échantillons, et manqué dans 12 % des cas. (1)
- d) Il faut $p_0 + 1,96\sigma_0 = p_1 - 1,645\sigma_1$, soit $0,07 = \frac{1,96\sqrt{0,2475} + 1,645\sqrt{0,2496}}{\sqrt{n}} = \frac{0,97509 + 0,82184}{\sqrt{n}} = \frac{1,79693}{\sqrt{n}}$. Donc $\sqrt{n} \geq 25,67$ et $n \geq 658,9$: environ 659 individus. (1)

À retenir — Le risque α se décroît, le risque β se calcule : seule l'augmentation de l'effectif permet de faire baisser les deux à la fois.

Exercice 5 — Exercice 5 — Deux enquêtes, une contradiction

(4 pts)

- a) En ligne : $f_1 = \frac{2176}{3200} = 0,68$; $\sqrt{\frac{0,68 \times 0,32}{3200}} = \sqrt{0,000068} \approx 0,008246$; $1,96 \times 0,008246 \approx 0,016163$; $J_1 \approx [0,664 ; 0,696]$. Aléatoire : $f_2 = \frac{354}{600} = 0,59$; $\sqrt{\frac{0,59 \times 0,41}{600}} = \sqrt{0,00040317} \approx 0,020079$; $1,96 \times 0,020079 \approx 0,039355$; $J_2 \approx [0,551 ; 0,629]$. (1)
- b) Les deux intervalles sont disjoints ($0,629 < 0,664$) : l'écart entre les deux résultats ne s'explique pas par le seul hasard du tirage, il est significatif au niveau 95 %. Cela prouve que les deux enquêtes ne mesurent pas la même chose, pas que l'opinion a changé. (1)
- c) La seconde : seul un tirage aléatoire justifie le modèle binomial et donc la formule de l'intervalle de confiance. L'enquête en ligne, à participation volontaire, sur-représente les personnes les plus motivées, ce qui introduit un biais de sélection non mesurable. (1)
- d) La taille n'agit que sur l'aléa du tirage, et de surcroît en $\frac{1}{\sqrt{n}}$: la marge est ici divisée par 2,4 environ, non par 5. Surtout, la précision n'est pas l'exactitude — un échantillon biaisé de 3 200 personnes donne un intervalle étroit autour d'une valeur fausse. (1)

Attention — Un grand échantillon réduit la marge d'erreur mais ne corrige aucun biais de recrutement : la manière de tirer prime sur le nombre de personnes tirées.