Sommes de variables aléatoires

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Probabilités · Sommes de variables aléatoires)

La démarche pour une espérance ou une variance

1. J'écris la variable étudiée à partir de variables simples : $aX+b$, $X+Y$, $X_1+\cdots+X_n$, moyenne $\dfrac{S_n}{n}$.

2. Espérance : linéarité, sans aucune condition.

3. Variance : coefficients au carré, constante supprimée ; pour une somme, je cite l'indépendance avant d'additionner.

4. Écart type : racine carrée de la variance, arrondie seulement à la fin.

Le réflexe — une variance de somme sans la phrase « les variables sont indépendantes car… » risque de ne pas rapporter tous les points.

Cas 1 · Espérance par linéarité

Réflexe — je découpe la variable en somme de variables simples (souvent des variables qui valent 1 ou 0) et j'additionne les espérances.

Exemple. Questions types : « Calculer $E(aX+bY+c)$ », « Exprimer N comme une somme et en déduire $E(N)$ ». Exemple : $E(X)=-2$, $E(Y)=7$, calculer $E(4X-Y+3)$.

Par linéarité de l'espérance (aucune hypothèse nécessaire) :
$E(4X-Y+3)=4E(X)-E(Y)+3=4\times(-2)-7+3=-12$.

Attention — $E(X^2)$ n'est pas $E(X)^2$: la linéarité ne s'applique pas aux carrés.

Cas 2 · Variance de aX + b

Réflexe — la constante disparaît, le coefficient passe au carré (variance) ou en valeur absolue (écart type).

Exemple. Questions types : « Calculer $V(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$ », « Trouver a et b pour obtenir une espérance et un écart type donnés ». Exemple : $E(X)=9$, $V(X)=4$ et $Y=-1{,}5X+20$.

$E(Y)=-1{,}5\times 9+20=6{,}5$.
$V(Y)=(-1{,}5)^2\times 4=2{,}25\times 4=9$, donc $\sigma(Y)=3$.

Attention — $V(X+b)=V(X)$ et $\sigma(-aX)=a\,\sigma(X)$ pour $a>0$: un écart type n'est jamais négatif.

Cas 3 · Somme de variables indépendantes

Réflexe — je justifie l'indépendance par l'énoncé, j'additionne les variances (coefficients au carré), puis racine.

Exemple. Questions types : « Justifier que $V(X-Y)=\ldots$ », « Calculer l'écart type de la masse totale ». Exemple : X et Y indépendantes, $\sigma(X)=0{,}5$ et $\sigma(Y)=1{,}2$; calculer $\sigma(X-Y)$.

X et Y sont indépendantes, donc $V(X-Y)=V(X)+(-1)^2V(Y)=0{,}25+1{,}44=1{,}69$.
$\sigma(X-Y)=\sqrt{1{,}69}=1{,}3$.

Attention — les écarts types ne s'ajoutent pas, et une différence ne soustrait pas les variances.

Cas 4 · Échantillon : somme et moyenne

Réflexe — μ et σ^2 sur une répétition ; « total » $\to$ S_n ($n\mu$; $n\sigma^2$) ; « moyenne » $\to$ M_n (μ ; σ^2/n).

Exemple. Questions types : « Calculer $E(S_n)$ et $\sigma(S_n)$ », « Montrer que $V(M_n) = \dots$ », « Plus petit n tel que $\sigma(M_n) \leqslant s$ ». Exemple : $\mu = 30$, $\sigma = 5$.

Pour $n = 400$: $E(S_{400}) = 12\,000$, $\sigma(S_{400}) = 5\sqrt{400} = 100$ et $\sigma(M_{400}) = \dfrac{5}{20} = 0{,}25$.
$\sigma(M_n) \leqslant 0{,}1 \iff \sqrt{n} \geqslant 50 \iff n \geqslant 2\,500$: au moins 2 500 répétitions.

Attention — si l'énoncé donne l'écart type, je l'élève au carré avant de multiplier par n.

Cas 5 · Loi binomiale par décomposition

Réflexe — $X_i = 1$ si succès à la i-ième épreuve ; $E(X_i) = p$, $V(X_i) = p(1-p)$; linéarité puis indépendance.

Exemple. Questions types : « Exprimer N comme une somme de variables de Bernoulli », « Démontrer que $E(N) = np$ et $V(N) = np(1-p)$ ». Exemple : 150 ampoules, chacune défectueuse avec la probabilité 0,04, indépendamment.

$N = X_1 + \cdots + X_{150}$, somme de 150 variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,04 : N suit $\mathcal{B}(150\,;0{,}04)$.
$E(N) = 150 \times 0{,}04 = 6$; $V(N) = 150 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 5{,}76$; $\sigma(N) = 2{,}4$.

Attention — deux binomiales de paramètres p différents ont une somme qui n'est pas binomiale.

Les pièges

- Additionner des variances sans avoir écrit que les variables sont indépendantes.
- Additionner des écarts types : avec $\sigma(X) = 3$ et $\sigma(Y) = 4$ indépendantes, $\sigma(X+Y) = 5$, pas 7.
- Oublier le carré du coefficient : $V(3X) = 9V(X)$, et $V(-X) = V(X)$.
- Écrire $V(X+b) = V(X) + b$: une constante ne disperse pas.
- Confondre S_n (qui se disperse en $\sigma\sqrt{n}$) et M_n (qui se concentre en $\sigma/\sqrt{n}$).
- Écrire $\sigma(S_n/n) = \sigma(S_n)/\sqrt{n}$: diviser par n divise l'écart type par n.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).