Sommes de variables aléatoires

Fiche tableaux : les formules à connaître
(Spécialité maths Terminale)

Espérance : toujours linéaire

Variable	Espérance	Hypothèse
$X + Y$	$E(X) + E(Y)$	aucune
$aX + b$	$a\,E(X) + b$	aucune
$aX + bY + c$	$a\,E(X) + b\,E(Y) + c$	aucune
$X_1 + \cdots + X_n$	$E(X_1) + \cdots + E(X_n)$	aucune

Exemple : si $E(X) = 2{,}5$, alors $E(4X - 1) = 4 \times 2{,}5 - 1 = 9$.

Variance et écart type de aX + b

Formule	À retenir
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$	formule de König-Huygens
$V(aX + b) = a^2\,V(X)$	coefficient au carré
$\sigma(aX + b) = \lvert a \rvert\,\sigma(X)$	valeur absolue
$V(X + b) = V(X)$	la constante disparaît

Exemple : si $\sigma(X) = 0{,}7$, alors $\sigma(-10X + 3) = 10 \times 0{,}7 = 7$.

Somme de variables indépendantes

Variable	Variance (si X et Y indépendantes)
$X + Y$	$V(X) + V(Y)$
$X - Y$	$V(X) + V(Y)$
$aX + bY + c$	$a^2V(X) + b^2V(Y)$
$X_1 + \cdots + X_n$	$V(X_1) + \cdots + V(X_n)$

Écart type : $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)}$. Exemple : $V(X) = 10$ et $V(Y) = 6$ donnent $V(X - Y) = 16$ et $\sigma(X - Y) = 4$.

Échantillon de taille n

	Espérance	Variance	Écart type
Somme S_n	$n\mu$	$n\sigma^2$	$\sigma\sqrt{n}$
Moyenne M_n	μ	$\dfrac{\sigma^2}{n}$	$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Ici $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$. Exemple : $\sigma = 9$ et $n = 81$ donnent $\sigma(S_{81}) = 81$ et $\sigma(M_{81}) = 1$.

Bernoulli et loi binomiale

Loi	Espérance	Variance
Bernoulli de paramètre p	p	$p(1-p)$
S_n de loi $\mathcal{B}(n\,;p)$	np	$np(1-p)$
Fréquence $F=\dfrac{S_n}{n}$	p	$\dfrac{p(1-p)}{n}$

Écart type : racine carrée de la variance, par exemple $\sigma(S_n)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : pour $\mathcal{B}(100\,;0{,}1)$, $E=10$, $V=9$, $\sigma=3$, et la fréquence a pour écart type 0,03.

Ce qui exige l'indépendance

Résultat	Indépendance à citer ?
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$	non
$V(aX+b)=a^2V(X)$	non (une seule variable)
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$	**oui**
$V(S_n)=n\sigma^2$, $V(M_n)=\dfrac{\sigma^2}{n}$	**oui** (échantillon)
$X+Y$ de loi $\mathcal{B}(n+m\,;p)$	**oui**, et même p

Contre-exemple : avec $Y=X$, $V(X+Y)=V(2X)=4V(X)$, et non $2V(X)$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).