

Devoir surveillé – Sommes de variables aléatoires

Espérance et variance d'une somme, échantillon de variables indépendantes, application à la loi binomiale
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Espérance et variance d'une transformation affine (4 pts)

- a) a) Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 14$ et $V(X) = 6$. Calculer $E(2X - 9)$.
 b) b) Calculer $V(2X - 9)$.
 c) c) Calculer l'écart type de $\frac{X}{3}$, arrondi au centième.
 d) d) Déterminer le réel $b > 0$ tel que $V(bX) = 54$.

Exercice 2 – Combinaison de deux variables indépendantes (4 pts)

- a) U et W sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(U) = 3,6$, $V(U) = 1,44$, $E(W) = 7,4$ et $V(W) = 2,56$.
 a) Calculer $E(U + W)$.
 b) b) Calculer $V(U + W)$ et $\sigma(U + W)$.
 c) c) Calculer $E(5U - 2W + 3)$.
 d) d) Calculer $V(5U - 2W + 3)$.

Exercice 3 – Échantillon issu d'une loi tabulée (4 pts)

- a) Le nombre X d'appels reçus en une minute par un standard suit la loi ci-dessous, les minutes étant indépendantes.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,40	0,35	0,20	0,05

- a) Calculer $E(X)$.
 b) b) Montrer que $V(X) = 0,79$.
 c) c) On observe 400 minutes consécutives. Calculer l'espérance et l'écart type, au centième, du nombre total d'appels S_{400} .
 d) d) Déterminer le plus petit entier n tel que l'écart type du nombre moyen d'appels par minute sur n minutes soit inférieur ou égal à 0,02.

Exercice 4 – Composants défectueux et fréquence*(4 pts)*

- a) Un composant électronique est défectueux avec la probabilité 0,08, indépendamment des autres. On en teste 250 et on note N le nombre de composants défectueux.
- a) En posant $X_i = 1$ si le i -ième composant est défectueux et $X_i = 0$ sinon, exprimer N et préciser la loi de N .
- b) Calculer $E(N)$, $V(N)$ et $\sigma(N)$, arrondi au centième.
- c) On note $F = \frac{N}{250}$ la fréquence de composants défectueux. Calculer $E(F)$ et $\sigma(F)$, arrondi au millième.
- d) Un élève écrit $\sigma(F) = \frac{\sigma(N)}{\sqrt{250}}$. Expliquer son erreur.

Exercice 5 – Assemblage de deux pièces*(4 pts)*

- a) Une pièce A a une masse d'espérance 48 g et d'écart type 1,5 g ; une pièce B a une masse d'espérance 62 g et d'écart type 2 g. Les deux pièces sont produites indépendamment et assemblées : la masse de l'assemblage est $T = A + B$.
- a) Calculer $E(T)$, $V(T)$ et $\sigma(T)$.
- b) On pose $D = B - A$. Calculer $E(D)$ et $\sigma(D)$, puis comparer $\sigma(D)$ à $\sigma(T)$.
- c) Un lot contient 9 assemblages indépendants. Calculer l'espérance et l'écart type de la masse totale du lot.
- d) Un technicien affirme que si l'on assemblait deux pièces A strictement identiques, la masse totale $2A$ aurait pour variance $2V(A)$. Expliquer l'erreur et donner $V(2A)$.

Bon courage !