

Corrigé et barème – Sommes de variables aléatoires

Espérance et variance d'une somme, échantillon de variables indépendantes, application à la loi binomiale
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Espérance et variance d'une transformation affine

(4 pts)

- a) $E(2X - 9) = 2 \times 14 - 9 = 28 - 9 = 19$. (1)
- b) $V(2X - 9) = 2^2 \times 6 = 24$: la constante -9 disparaît. (1)
- c) $V\left(\frac{X}{3}\right) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, donc $\sigma = \sqrt{2/3} \approx 0,82$. (1)
- d) $V(bX) = 6b^2 = 54$ donne $b^2 = 9$, donc $b = 3$ car $b > 0$. (1)

Erreur fréquente — Le coefficient d'une transformation affine passe au carré dans la variance, tandis que la constante additive n'y intervient jamais.

Exercice 2 – Combinaison de deux variables indépendantes

(4 pts)

- a) $E(U + W) = 3,6 + 7,4 = 11$. (1)
- b) Par indépendance, $V(U + W) = 1,44 + 2,56 = 4$, donc $\sigma(U + W) = 2$. (1)
- c) $E(5U - 2W + 3) = 5 \times 3,6 - 2 \times 7,4 + 3 = 18 - 14,8 + 3 = 6,2$. (1)
- d) $V(5U - 2W + 3) = 25 \times 1,44 + 4 \times 2,56 = 36 + 10,24 = 46,24$. (1)

À retenir — Un coefficient négatif augmente la variance comme son opposé, puisque seul son carré intervient.

Exercice 3 – Échantillon issu d'une loi tabulée

(4 pts)

- a) $E(X) = 0 \times 0,40 + 1 \times 0,35 + 2 \times 0,20 + 3 \times 0,05 = 0,35 + 0,40 + 0,15 = 0,9$ appel. (1)
- b) $E(X^2) = 0,35 + 4 \times 0,20 + 9 \times 0,05 = 0,35 + 0,80 + 0,45 = 1,6$, donc $V(X) = 1,6 - 0,9^2 = 1,6 - 0,81 = 0,79$. (1)
- c) Échantillon de taille 400 : $E(S_{400}) = 400 \times 0,9 = 360$ appels et $V(S_{400}) = 400 \times 0,79 = 316$, donc $\sigma(S_{400}) = \sqrt{316} \approx 17,78$. (1)
- d) $\frac{\sqrt{0,79}}{\sqrt{n}} \leq 0,02 \iff n \geq \frac{0,79}{0,0004} = 1\,975$, donc $n = 1\,975$ minutes. (1)

Repère — Les formules d'échantillon portent sur la variance : élever l'écart type au carré avant de multiplier ou de diviser par n .

Exercice 4 – Composants défectueux et fréquence

(4 pts)

- a) $N = X_1 + \dots + X_{250}$, somme de 250 variables de Bernoulli indépendantes de paramètre 0,08 : N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(250; 0,08)$. (1)
- b) $E(N) = 250 \times 0,08 = 20$; $V(N) = 250 \times 0,08 \times 0,92 = 18,4$; $\sigma(N) = \sqrt{18,4} \approx 4,29$. (1)
- c) $E(F) = \frac{20}{250} = 0,08$ et $V(F) = \frac{18,4}{250^2} = 0,0002944$, donc $\sigma(F) = \frac{4,2895}{250} \approx 0,017$. (1)
- d) $F = \frac{1}{250}N$: le coefficient $\frac{1}{250}$ sort de la variance au carré, donc $\sigma(F) = \frac{\sigma(N)}{250}$ et non $\frac{\sigma(N)}{\sqrt{250}}$. L'élève confond la division d'une somme par n avec la formule $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, qui concerne l'écart type d'une moyenne exprimé à partir de $\sigma(X)$, pas de $\sigma(N)$. (1)

Le point clé — Diviser une somme par n divise son écart type par n , alors que l'écart type d'une moyenne s'exprime à partir de celui d'une seule variable en divisant par la racine de n .

Exercice 5 – Assemblage de deux pièces*(4 pts)*

- a) $E(T) = 48 + 62 = 110$ g. Par indépendance, $V(T) = 1,5^2 + 2^2 = 2,25 + 4 = 6,25$, donc $\sigma(T) = 2,5$ g. (1)
- b) $E(D) = 62 - 48 = 14$ g. Comme $V(-A) = V(A)$, $V(D) = 2,25 + 4 = 6,25$ et $\sigma(D) = 2,5$ g : $\sigma(D) = \sigma(T)$, soustraire deux variables indépendantes disperse autant que les additionner. (1)
- c) Les 9 assemblages forment un échantillon de taille 9 de la loi de T : espérance $9 \times 110 = 990$ g et écart type $2,5 \times \sqrt{9} = 7,5$ g. (1)
- d) La formule $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ exige l'indépendance ; deux pièces identiques donnent A et A , qui ne sont pas indépendantes. On a $V(2A) = 2^2 \times 2,25 = 9$, et non 4,5. (1)

Attention — Deux pièces identiques ne forment jamais un couple indépendant : doubler une variable quadruple sa variance au lieu de la doubler.