

Raisonnement par récurrence

La récurrence est l'outil qui permet de démontrer une propriété pour une infinité d'entiers en deux étapes : c'est la clé des exercices de bac sur les suites.

1 Le principe

- **Propriété $P(n)$** : affirmation dépendant d'un entier naturel n , vraie ou fausse pour chaque valeur.
- **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie au rang de départ n_0 .
- **Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
- Image : une rangée de dominos. L'hérédité assure que chacun renverse le suivant, l'initialisation pousse le premier.

2 Rédaction type

1. « Pour tout entier $n \geq n_0$, on note $P(n)$ la propriété : ... »
2. « **Initialisation.** Pour $n = n_0$: ... donc $P(n_0)$ est vraie. »
3. « **Hérédité.** Soit $n \geq n_0$ un entier tel que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$. » On part de l'hypothèse au rang n et on transforme jusqu'à la formule au rang $n+1$.
4. « **Conclusion.** $P(n_0)$ est vraie et P est héréditaire : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. »

3 Sur les suites

- **Formule explicite** : calculer u_1, u_2, u_3 , conjecturer, puis démontrer en remplaçant u_n par la formule dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
- **Majoration / minoration** : la borne candidate est le point fixe, solution de $f(x) = x$. Dans l'hérédité, appliquer à l'inégalité les opérations qui définissent u_{n+1} , en justifiant chaque sens.
- **Sens de variation** : si f est croissante et $u_0 \leq u_1$, la suite est croissante (récurrence sur « $u_n \leq u_{n+1}$ ») ; si $u_0 \geq u_1$, elle est décroissante.

4 Formules et résultats classiques

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$;
 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **Inégalité de Bernoulli** (démonstration exigible) : pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n ,
 $(1+a)^n \geq 1 + na$.
- $2^n \geq n + 1$ pour tout n ; $n! \geq 2^n$ pour $n \geq 4$; $2^n \geq n^2 + 1$ pour $n \geq 5$.
- Divisibilité : $a \times a^n - c = a(a^n - c) + (a-1)c$; si $a^n - c$ est un multiple de d , il reste à vérifier que $(a-1)c$ l'est aussi.

5 Pièges

- Hérédité sans initialisation : ne prouve rien (« $5^n + 1$ divisible par 4 » est héréditaire et toujours fausse).
- « Supposons que pour tout $n...$ » : c'est supposer la conclusion. L'hypothèse porte sur un rang n fixé.
- Mauvais rang de départ : initialiser là où l'hérédité devient valable ; vérifier les petits cas à part.
- Raisonner à l'envers : partir de $P(n+1)$ et retomber sur du vrai n'est pas une preuve.
- Oublier de justifier le sens d'une inégalité (multiplication par un nombre positif, croissance de la racine carrée).

L'ESSENTIEL

- Récurrence = initialisation + hérédité, puis conclusion pour tout entier $n \geq n_0$.
- L'hypothèse de récurrence porte sur un entier n fixé, jamais sur « tout n ».
- Pour une suite $u(n+1) = f(u(n))$: formule explicite, encadrement par le point fixe, monotonie si f est croissante.

—Inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1 + na$ pour $a > 0$, démonstration exigible.

—Des vérifications sur quelques rangs ne sont jamais une démonstration.