

Devoir surveillé – Raisonnement par récurrence

Démontrer une propriété pour tout entier naturel : initialisation, hérédité, applications aux suites
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Une somme à démontrer

(4 pts)

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$.

- a) a) Calculer S_1 , S_2 et S_3 , puis vérifier que ces valeurs coïncident avec $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
- b) b) Écrire l'hypothèse de récurrence au rang n et l'égalité à obtenir au rang $n+1$.
- c) c) Démontrer l'hérédité, puis conclure.
- d) d) En déduire la valeur de S_{30} .

Exercice 2 – Formule explicite et sens de variation

(4 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 7$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 4u_n - 9$.

- a) a) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- b) b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 4^{n+1} + 3$.
- c) c) En déduire l'expression de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n , puis le sens de variation de (u_n) .
- d) d) Un élève affirme : « J'ai vérifié la formule pour $n = 0, 1, 2, 3$, elle est donc vraie pour tout n . »
Expliquer pourquoi ce raisonnement n'est pas une démonstration.

Exercice 3 – Suite bornée et croissante

(4 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

- a) a) Calculer u_1 (valeur exacte) et u_2 (arrondi au centième).
- b) b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 4$.
- c) c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.
- d) d) La suite (u_n) est-elle majorée par 3,9 ? Justifier.

Exercice 4 – Une inégalité avec rang de départ

(4 pts)

On souhaite comparer 3^n et n^3 pour les entiers naturels n .

- a) a) Comparer 3^n et n^3 pour $n = 0, 1, 2$ et 3 .
- b) b) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $3n^3 \geq (n+1)^3$.
- c) c) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, $3^n \geq n^3$.
- d) d) L'hérédité démontrée en c) est-elle valable pour $n = 2$? Expliquer pourquoi on a choisi d'initialiser au rang 3 et non au rang 0, alors que l'inégalité est vraie pour $n = 0, 1, 2$.

Exercice 5 – Divisibilité et fausse initialisation*(4 pts)*

- a) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est divisible par 9.
- b) b) En déduire que pour tout entier naturel n , $10^n + 8$ est divisible par 9.
- c) c) Soit $P(n)$ la propriété : « $4^n + 2$ est divisible par 6 ». Montrer que $P(n)$ est héréditaire.
- d) d) Un élève affirme : « $4^0 + 2 = 3$ n'est pas divisible par 6, donc $P(n)$ est fausse pour tout n . » A-t-il raison ? Que peut-on démontrer exactement ?

Bon courage !