

Corrigé et barème – Raisonnement par récurrence

Démontrer une propriété pour tout entier naturel : initialisation, hérédité, applications aux suites
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Une somme à démontrer

(4 pts)

- a) $S_1 = 2, S_2 = 2 + 6 = 8, S_3 = 8 + 12 = 20$. Formule : $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2, \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 20$: les valeurs coïncident. (1)
- b) Hypothèse : $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour un entier $n \geq 1$ fixé. À obtenir : $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. (1)
- c) $S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = (n+1)(n+2) \left(\frac{n}{3} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$. Avec l'initialisation $P(1)$ (question a), par récurrence, $S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour tout $n \geq 1$. (1)
- d) $S_{30} = \frac{30 \times 31 \times 32}{3} = 10 \times 31 \times 32 = 9920$. (1)

Le point clé — Dans l'hérédité, factoriser par $(n+1)(n+2)$ au lieu de tout développer : la forme attendue au rang $n+1$ apparaît immédiatement.

Exercice 2 – Formule explicite et sens de variation

(4 pts)

- a) $u_1 = 28 - 9 = 19 ; u_2 = 76 - 9 = 67 ; u_3 = 268 - 9 = 259$. (1)
- b) Initialisation : $4^1 + 3 = 7 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 4^{n+1} + 3$, alors $u_{n+1} = 4(4^{n+1} + 3) - 9 = 4^{n+2} + 12 - 9 = 4^{n+2} + 3$. Conclusion : pour tout $n, u_n = 4^{n+1} + 3$. (1)
- c) $u_{n+1} - u_n = 4^{n+2} - 4^{n+1} = 4^{n+1}(4 - 1) = 3 \times 4^{n+1} > 0$: la suite est strictement croissante. (1)
- d) Quatre vérifications ne disent rien des rangs suivants : une formule peut être vraie jusqu'à un rang et fausse ensuite (comme $n^2 + n + 41$ premier jusqu'à $n = 39$). Seule l'hérédité, valable pour tout n , permet de conclure pour tous les entiers. (1)

Erreur fréquente — Écrire la formule au rang $n+1$ et « vérifier qu'elle marche » : il faut partir de $u_{n+1} = 4u_n - 9$ et remplacer u_n par l'hypothèse, pas l'inverse.

Exercice 3 – Suite bornée et croissante

(4 pts)

- a) $u_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 ; u_2 = \sqrt{12 + 2\sqrt{3}} \approx \sqrt{15,46} \approx 3,93$. (1)
- b) Initialisation : $u_0 = 0 \in [0; 4]$. Hérédité : si $0 \leq u_n \leq 4$, alors $12 \leq u_n + 12 \leq 16$ et, la racine carrée étant croissante, $\sqrt{12} \leq u_{n+1} \leq 4$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. Conclusion : $0 \leq u_n \leq 4$ pour tout n . (1)
- c) Initialisation : $u_0 = 0 \leq \sqrt{12} = u_1$. Hérédité : si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $u_n + 12 \leq u_{n+1} + 12$ (positifs) et par croissance de la racine carrée, $\sqrt{u_n + 12} \leq \sqrt{u_{n+1} + 12}$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. Conclusion : la suite est croissante. (1)
- d) Non : $u_2 \approx 3,93 > 3,9$, et la suite étant croissante, tous les termes suivants dépassent aussi 3,9. Le majorant 4 de la question b) ne peut pas être remplacé par 3,9. (1)

Attention — Un majorant obtenu par récurrence (ici 4, point fixe de $x \mapsto \sqrt{x+12}$) n'est pas n'importe quel nombre : une valeur plus petite peut être dépassée dès les premiers termes.

Exercice 4 – Une inégalité avec rang de départ

(4 pts)

- a) $n = 0 : 1 \geq 0 ; n = 1 : 3 \geq 1 ; n = 2 : 9 \geq 8 ; n = 3 : 27 \geq 27$ (égalité). Dans les quatre cas, $3^n \geq n^3$. (1)
- b) $3n^3 - (n+1)^3 = 3n^3 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 = 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1$. Pour $n \geq 3 : 2n^3 = n^2 \cdot 2n \geq 6n^2$, donc $2n^3 - 3n^2 \geq 3n^2$, puis $3n^2 - 3n - 1 = 3n(n-1) - 1 \geq 3 \times 3 \times 2 - 1 = 17 > 0$. Ainsi $3n^3 \geq (n+1)^3$. (1)
- c) Initialisation : $3^3 = 27 \geq 27 = 3^3$. Hérédité : soit $n \geq 3$ tel que $3^n \geq n^3$; alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3n^3 \geq (n+1)^3$ d'après b). Conclusion : $3^n \geq n^3$ pour tout $n \geq 3$. (1)
- d) Non : pour $n = 2, 3 \times 2^3 = 24 < 27 = 3^3$, l'inégalité auxiliaire b) est fausse et l'hérédité de 2 à 3 n'est pas établie par ce calcul. On initialise donc au premier rang à partir duquel l'hérédité est valable, $n_0 = 3$; les cas $n = 0, 1, 2$ sont traités à part, à la main (question a). (1)

Repère — Le rang de départ d'une récurrence est dicté par l'hérédité, pas seulement par les premières vérifications : on initialise là où l'inégalité auxiliaire commence à fonctionner.

Exercice 5 – Divisibilité et fausse initialisation

(4 pts)

- a) Initialisation : $10^0 - 1 = 0 = 9 \times 0$. Hérédité : si $10^n - 1 = 9k$ (k entier), alors $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 9 = 90k + 9 = 9(10k + 1)$. Conclusion : 9 divise $10^n - 1$ pour tout n . (1)
- b) $10^n + 8 = (10^n - 1) + 9 = 9k + 9 = 9(k + 1)$: divisible par 9 pour tout n . (1)
- c) Supposons $4^n + 2 = 6k$ avec k entier. Alors $4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2 = 4(4^n + 2) - 8 + 2 = 4(4^n + 2) - 6 = 24k - 6 = 6(4k - 1) : P(n+1)$ est vraie. P est héréditaire. (1)
- d) Non. $P(0)$ est fausse, mais $P(1)$ est vraie : $4 + 2 = 6$. Comme P est héréditaire, on initialise au rang 1 : par récurrence, $4^n + 2$ est divisible par 6 pour tout $n \geq 1$. La propriété n'est fausse qu'au rang 0. (1)

Astuce — Pour une divisibilité, écrire $a^{n+1} - c = a(a^n - c) + (a - 1)c$: le premier terme est un multiple par hypothèse, le second doit l'être aussi, sinon la propriété n'est pas héréditaire.