Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Géométrie dans l'espace)

La démarche pour un exercice de géométrie repérée

1. Je vérifie que le repère est orthonormé et je calcule les coordonnées des vecteurs utiles (« arrivée moins départ »).

2. Je traduis la question : orthogonalité → produit scalaire nul ; longueur → norme ; angle → cosinus ; plan → vecteur normal et point.

3. Je calcule en écrivant les produits terme à terme, sans sauter d'étape.

4. Je conclus en citant la propriété (« deux vecteurs non colinéaires du plan », « $H \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{MH}$ colinéaire à $\vec{n}$ »).

Le réflexe — chaque conclusion géométrique cite le critère : un vecteur normal se justifie par deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs non colinéaires, un projeté par ses deux conditions.

Cas 1 · Produit scalaire sans coordonnées

Réflexe — angle droit visible → je projette ; longueurs et angle → cosinus ; seulement des longueurs → polarisation.

Exemple. Questions types : « Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans un cube, un tétraèdre ». Exemple : cube $ABCDEFGH$ d'arête 5, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG}$.

(CG) est orthogonale à la face $ABCD$, donc à (AC) : le projeté orthogonal de G sur (AC) est C.

Donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$.

Dans le carré $ABCD$ de côté 5, $AC^2 = 5^2 + 5^2 = 50$. Ainsi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AG} = 50$.

Attention — projeté de sens contraire → produit scalaire négatif ; produit scalaire nul ≠ vecteur nul.

Cas 2 · Longueur et angle en repère orthonormé

Réflexe — $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$, normes, puis $\cos\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} \,/\, (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|)$ et calculatrice en degrés.

Exemple. Questions types : « Calculer une longueur », « Déterminer une mesure de l'angle, arrondie au dixième ». Exemple : $\vec{u}\,(2\,;1\,;2)$ et $\vec{v}\,(3\,;0\,;-4)$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 0 - 8 = -2$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{9+0+16} = 5$.

$\cos\theta = \dfrac{-2}{3 \times 5} = -\dfrac{2}{15}$, donc $\theta \approx 97{,}7°$ (angle obtus, cosinus négatif).

Attention — formules valables seulement en repère orthonormé ; $\|\vec{u}\|^2$ n'est pas $\|\vec{u}\|$.

Cas 3 · Montrer une orthogonalité droite-plan

Réflexe — deux produits scalaires nuls avec deux vecteurs NON colinéaires du plan.

Exemple. Questions types : « Montrer que $\vec{w}$ est normal au plan », « Montrer que d est orthogonale à $\mathcal{P}$ ». Exemple : d dirigée par $\vec{w}\,(3\,;-1\,;2)$, plan dirigé par $\vec{u}\,(1\,;1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(0\,;2\,;1)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : l'abscisse de $\vec{v}$ est nulle, pas celle de $\vec{u}$.

$\vec{w} \cdot \vec{u} = 3 - 1 - 2 = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0 - 2 + 2 = 0$.

$\vec{w}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il lui est normal, donc d est orthogonale au plan.

Attention — orthogonales ≠ perpendiculaires (il faut un point commun).

Cas 4 · Équation d'un plan par trois points

Réflexe — $\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$, je fixe une inconnue, puis d avec A et vérification avec B et C.

Exemple. Questions types : « Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) ». Exemple : $A(2\,;1\,;0)$, $B(0\,;3\,;1)$, $C(1\,;0\,;3)$.

$\overrightarrow{AB}\,(-2\,;2\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1\,;-1\,;3)$, non colinéaires.
$\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$: $-2a+2b+c=0$ et $-a-b+3c=0$. Avec $c=4$: $b-a=-2$ et $a+b=12$, d'où $b=5$, $a=7$.
$7x+5y+4z+d=0$; avec A : $14+5+d=0$, $d=-19$. Vérification : B donne $15+4-19=0$, C donne $7+12-19=0$.

Attention — le terme d se calcule avec un point, il ne se lit pas sur $\vec{n}$.

Cas 5 · Projeté orthogonal et distance à un plan

Réflexe — $M+t\,\vec{n}$ dans l'équation du plan $\to t\to H\to MH=|t|\times\|\vec{n}\|$.

Exemple. Questions types : « Déterminer le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{P}$ », « En déduire la distance de M au plan ». Exemple : $\mathcal{P}$: $2x+y-2z+1=0$ et $M(5\,;3\,;-2)$.

Points de la droite passant par M dirigée par $\vec{n}\,(2\,;1\,;-2)$: $(5+2t\,;3+t\,;-2-2t)$.
$2(5+2t)+(3+t)-2(-2-2t)+1=18+9t=0$, donc $t=-2$ et $H(1\,;1\,;2)$.
$MH=|-2|\times\|\vec{n}\|=2\times3=6$.

Attention — un point du plan n'est le projeté que si $\vec{MH}$ est normal au plan.

Les pièges

- Produit scalaire nul ≠ vecteur nul : les vecteurs sont orthogonaux.
- Un seul produit scalaire nul ne prouve pas qu'un vecteur est normal à un plan.
- Dans l'espace, ax + by + cz + d = 0 est un plan, jamais une droite.
- Normales colinéaires : plans parallèles, confondus seulement si un point de l'un est dans l'autre.
- Angle d'un triangle en A : les deux vecteurs partent de A ($\vec{AB}$ et $\vec{AC}$).

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).