

## Devoir surveillé – Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace, expression en repère orthonormé, orthogonalité de droites et de plans, vecteur normal, équation cartésienne d'un plan, projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan, distances

Durée : 240 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_ Note : \_\_\_\_\_ / 20

*Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.*

---

### Exercice 1 – Produit scalaire, angle et aire d'un triangle (5 pts)

- L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points  $A(3; 1; -2)$ ,  $B(7; -3; 0)$  et  $C(5; 3; 2)$ . Calculer les longueurs  $AB$  et  $AC$ .
- Calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- En déduire une mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ , arrondie au dixième de degré.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  du point  $C$  sur la droite  $(AB)$ .
- Montrer que  $CH = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ .
- En déduire l'aire exacte du triangle  $ABC$ , puis sa valeur arrondie au centième.

### Exercice 2 – Plans, droite et projeté orthogonal (5 pts)

- L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les plans  $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 7 = 0$  et  $\mathcal{Q} : x + 2y - 3 = 0$ , le point  $A(1; -1; 2)$  et la droite  $d$  de représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$
Vérifier que  $A$  appartient à  $\mathcal{P}$  et donner un vecteur normal  $\vec{n}$  au plan  $\mathcal{P}$ .
- Montrer que la droite  $d$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$ . Est-elle contenue dans  $\mathcal{P}$  ?
- Montrer que les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont perpendiculaires.
- Montrer que la droite  $\Delta$  de représentation paramétrique  $x = 1 - 4s$ ,  $y = 1 + 2s$ ,  $z = 3 + 5s$  ( $s \in \mathbb{R}$ ) est la droite d'intersection des plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ .
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $K$  du point  $B(4; 2; -1)$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .
- En déduire la distance du point  $B$  au plan  $\mathcal{P}$ . Le point  $A$  est-il le point de  $\mathcal{P}$  le plus proche de  $B$  ? Justifier.

**Exercice 3 – Distance d'un sommet à un plan dans un pavé droit** (5 pts)

- a)  $ABCDEFGH$  est un pavé droit :  $ABCD$  et  $EFGH$  sont des faces opposées,  $E, F, G, H$  sont au-dessus de  $A, B, C, D$ , et  $AB = 2$ ,  $AD = 3$ ,  $AE = 1$ . On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  tel que  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$ ,  $\overrightarrow{AD} = 3\vec{j}$  et  $\overrightarrow{AE} = \vec{k}$ . Donner les coordonnées des points  $C, F, G$  et  $H$ .
- b) Montrer que le vecteur  $\vec{n}(3; 2; 6)$  est normal au plan  $(CFH)$ .
- c) En déduire une équation cartésienne du plan  $(CFH)$ .
- d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $G$  et orthogonale au plan  $(CFH)$ , puis les coordonnées du point d'intersection  $L$  de  $\Delta$  et de  $(CFH)$ .
- e) Calculer la distance  $GL$ .
- f) Calculer le volume du tétraèdre  $GCFH$ , puis en déduire l'aire du triangle  $CFH$ .

**Exercice 4 – Vrai ou faux (justifier chaque réponse)** (5 pts)

- a) Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier ; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. L'espace est muni d'un repère orthonormé. **Affirmation 1** : les vecteurs  $\vec{u}(1; -3; 2)$  et  $\vec{v}(4; 2; 1)$  sont orthogonaux.
- b) **Affirmation 2** : la droite de représentation paramétrique  $x = 2 + t, y = 1 - 2t, z = t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) coupe le plan d'équation  $x + y + z = 5$ .
- c) **Affirmation 3** : deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
- d) **Affirmation 4** : deux plans perpendiculaires à un même troisième plan sont parallèles.
- e) **Affirmation 5** : la distance du point  $M(3; 0; -1)$  au plan d'équation  $2x + 3y + 6z + 2 = 0$  est égale à  $\frac{2}{7}$ .
- f) **Affirmation 6** : le projeté orthogonal du point  $S(1; 2; 3)$  sur la droite passant par l'origine  $O$  et dirigée par  $\vec{w}(1; 1; 0)$  est le point  $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0)$ .

*Bon courage !*