

Corrigé et barème – Produit scalaire et orthogonalité dans l'espace

Produit scalaire dans l'espace, expression en repère orthonormé, orthogonalité de droites et de plans, vecteur normal, équation cartésienne d'un plan, projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan, distances

Durée : 240 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Produit scalaire, angle et aire d'un triangle

(5 pts)

- $\overrightarrow{AB}(4; -4; 2)$, $AB = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$; $\overrightarrow{AC}(2; 2; 4)$, $AC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. (0,833333)
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 - 8 + 8 = 8$. (0,833333)
- $\cos \widehat{BAC} = \frac{8}{6 \times 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \approx 0,272$, donc $\widehat{BAC} \approx 74,2^\circ$. (0,833333)
- $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ donnent $8 - 36k = 0$, $k = \frac{2}{9}$: $H(\frac{35}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{14}{9})$. (0,833333)
- $AH = \frac{2}{9} \times 6 = \frac{4}{3}$; triangle AHC rectangle en H : $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 24 - \frac{16}{9} = \frac{200}{9}$, donc $CH = \frac{\sqrt{200}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. (0,833333)
- $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{10\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2} \approx 14,14$ unités d'aire. (0,833333)

Erreur fréquente — Pour le projeté sur (AB) , le coefficient est $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB^2}$: diviser par AB au lieu de AB^2 est l'erreur la plus courante.

Exercice 2 – Plans, droite et projeté orthogonal

(5 pts)

- $2 + 1 + 4 - 7 = 0$, donc $A \in \mathcal{P}$; $\vec{n}(2; -1; 2)$ est normal à $\mathcal{P}$. (0,833333)
- $\vec{u}(1; 4; 1)$ dirige d et $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 4 + 2 = 0$: d est parallèle à $\mathcal{P}$. Le point $(3; -2; 1)$ de d donne $6 + 2 + 2 - 7 = 3 \neq 0$: d est strictement parallèle, non contenue. (0,833333)
- $\vec{n}'(1; 2; 0)$ est normal à $\mathcal{Q}$ et $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 - 2 + 0 = 0$: les plans sont perpendiculaires. (0,833333)
- Pour tout s : $2(1 - 4s) - (1 + 2s) + 2(3 + 5s) - 7 = 0$ et $(1 - 4s) + 2(1 + 2s) - 3 = 0$, donc $\Delta \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Les normales n'étant pas colinéaires, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite : c'est Δ . (0,833333)
- $K = (4 + 2t; 2 - t; -1 + 2t)$; $2(4 + 2t) - (2 - t) + 2(-1 + 2t) - 7 = 9t - 3 = 0$, $t = \frac{1}{3}$: $K(\frac{14}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3})$. (0,833333)
- $BK = \frac{1}{3} \|\vec{n}\| = \frac{1}{3} \times 3 = 1$. $\overrightarrow{BA}(-3; -3; 3)$ et $BA = 3\sqrt{3} \approx 5,2 > 1$: non, le point le plus proche est K . (0,833333)

À retenir — Droite et plan : on combine représentation paramétrique et équation cartésienne ; deux plans : on compare leurs vecteurs normaux.

Exercice 3 – Distance d'un sommet à un plan dans un pavé droit

(5 pts)

- a) $C(2; 3; 0)$, $F(2; 0; 1)$, $G(2; 3; 1)$, $H(0; 3; 1)$. (0,833333)
- b) $\overrightarrow{CF}(0; -3; 1)$ et $\overrightarrow{CH}(-2; 0; 1)$ non colinéaires ; $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0 - 6 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{CH} = -6 + 0 + 6 = 0$: $\vec{n}$ est normal à (CFH) . (0,833333)
- c) $3x + 2y + 6z + d = 0$; avec $C : 6 + 6 + d = 0$, $d = -12$. $(CFH) : 3x + 2y + 6z - 12 = 0$. (0,833333)
- d) $\Delta : x = 2 + 3t$, $y = 3 + 2t$, $z = 1 + 6t$; $3(2 + 3t) + 2(3 + 2t) + 6(1 + 6t) - 12 = 49t + 6 = 0$, $t = -\frac{6}{49} : L(\frac{80}{49}; \frac{135}{49}; \frac{13}{49})$. (0,833333)
- e) $GL = \frac{6}{49} \|\vec{n}\| = \frac{6}{49} \sqrt{9 + 4 + 36} = \frac{6}{49} \times 7 = \frac{6}{7}$. (0,833333)
- f) $[GC]$, $[GF]$, $[GH]$ deux à deux orthogonales, de longueurs 1, 3, 2 : $V = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 2}{2} \times 1 = 1$. Et $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{CFH} \times GL$, donc $\mathcal{A}_{CFH} = \frac{3 \times 1}{\frac{6}{7}} = \frac{7}{2}$. (0,833333)

Le point clé — Calculer un même volume de deux façons donne une aire ou une distance sans calcul lourd.

Exercice 4 – Vrai ou faux (justifier chaque réponse)

(5 pts)

- a) Vrai : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 6 + 2 = 0$. (0,833333)
- b) Faux : $(2 + t) + (1 - 2t) + t = 3$ pour tout t , et $3 \neq 5$; la droite est strictement parallèle au plan. (0,833333)
- c) Vrai : leurs vecteurs directeurs sont tous deux colinéaires à un même vecteur normal du plan, donc colinéaires entre eux. (0,833333)
- d) Faux : les plans d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont perpendiculaires au plan $z = 0$ (normales $(1; 0; 0) \cdot (0; 0; 1) = 0$ et $(0; 1; 0) \cdot (0; 0; 1) = 0$), mais ils sont sécants selon l'axe des cotes. (0,833333)
- e) Vrai : $H = M + t\vec{n}$ avec $\vec{n}(2; 3; 6)$; $2 + 49t = 0$, $t = -\frac{2}{49}$, et $MH = \frac{2}{49} \times \sqrt{4 + 9 + 36} = \frac{2}{49} \times 7 = \frac{2}{7}$. (0,833333)
- f) Vrai : $H(k; k; 0)$ et $\overrightarrow{HS} \cdot \vec{w} = (1 - k) + (2 - k) = 3 - 2k = 0$ donnent $k = \frac{3}{2}$. (0,833333)

Attention — Un contre-exemple précis suffit pour réfuter une affirmation générale ; pour la prouver vraie, il faut un argument valable dans tous les cas.