Primitives

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Analyse · Primitives)

La démarche pour trouver une primitive

1. Je regarde l'intervalle et ce qui est demandé : une primitive, toutes les primitives, ou celle qui vérifie une condition.

2. Je reconnais la forme : somme de fonctions usuelles (tableau, linéarité), fonction de $ax+b$, ou forme composée ($u'u^n$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'e^u\ldots$) dont je nomme u et u'.

3. J'ajuste la constante multiplicative et je vérifie la condition sur l'intervalle ($u>0$ pour $\ln u$ et $\sqrt{u}$, $u\neq 0$ pour $\dfrac{1}{u}$).

4. Je contrôle en dérivant, puis j'ajoute k et j'utilise la condition s'il y en a une.

Le réflexe — une primitive se justifie en nommant la forme et la fonction u (« forme u′/u avec u(x) = … > 0 ») ; une réponse sans cette ligne, ou sans contrôle par la dérivée, risque de ne pas rapporter tous les points.

Cas 1 · Vérifier ou chercher une primitive par identification

Réflexe — je dérive F et je retrouve f ; si la forme est imposée, je dérive et j'identifie les coefficients.

Exemple. Questions types : « Montrer que F est une primitive de f », « Déterminer a et b pour que… ». Exemple : $F(x)=(x+2)e^{-x}$ et $f(x)=-(x+1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions dérivables).

$F'(x)=1\times e^{-x}+(x+2)\times(-e^{-x})=(1-x-2)e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$.

Pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$: F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Attention — on dérive F, jamais f ; et le produit des primitives n'est pas une primitive du produit.

Cas 2 · Fonctions usuelles et linéarité

Réflexe — je découpe en somme, j'applique le tableau terme par terme en gardant les coefficients ; pour f(ax + b), je divise par a.

Exemple. Question type : « Déterminer une primitive de f sur I ». Exemple : $f(x)=5x^4-\dfrac{2}{x}+3\sin x$ sur $]0\,;+\infty[$.

Une primitive de x^4 est $\dfrac{x^5}{5}$, de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$ (car $x>0$), de $\sin x$ est $-\cos x$.

Par linéarité : $F(x)=x^5-2\ln x-3\cos x$.

Contrôle : $F'(x)=5x^4-\dfrac{2}{x}+3\sin x=f(x)$.

Attention — sin donne −cos ; 1/x² donne −1/x et non ln(x²) ; la formule $x^{n+1}/(n+1)$ est interdite pour n = −1.

Cas 3 · Forme $u'u^n$, u'/u^2 ou $u'/\sqrt{u}$

Réflexe — je nomme u, je calcule u′, j'écris f = λ × forme, j'applique la formule, je vérifie $u \neq 0$ ou $u > 0$.

Exemple. Question type : « Déterminer une primitive de f ». Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

On pose $u(x) = x^3+1$: $u'(x) = 3x^2$, et $u(x) > 0$ pour $x > -1$.
$f = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{u'}{u^2}$; une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$.
Donc $F(x) = -\dfrac{1}{3(x^3+1)}$.

Attention — on n'ajuste qu'une constante, jamais un x ; si u′ n'apparaît pas, on développe ou on cherche une autre forme.

Cas 4 · Forme u'/u ou $u'e^u$

Réflexe — exponentielle : je cherche u′ devant e^u ; quotient : numérateur = dérivée du dénominateur à une constante près, puis $u > 0$.

Exemple. Question type : « Déterminer une primitive de f ». Exemple : $f(x) = 3x^2e^{x^3-1}$ sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^3-1$: $u'(x) = 3x^2$.
$f = u'e^u$, dont une primitive est e^u.
Donc $F(x) = e^{x^3-1}$; contrôle : $F'(x) = 3x^2e^{x^3-1}$.

Attention — pas de ln u sans $u > 0$ sur l'intervalle ; dénominateur au carré : c'est u'/u^2, pas u'/u.

Cas 5 · Condition initiale, équation $y' = f$

Réflexe — toutes les primitives F(x) + k, la condition donne k, j'écris la fonction complète.

Exemple. Questions types : « Déterminer la primitive telle que… », « Résoudre $y' = f$ avec $y(x_0) = y_0$ ». Exemple : $f(x) = 6x - e^x$ avec $F(0) = 4$.

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont $F(x) = 3x^2 - e^x + k$, $k \in \mathbb{R}$.
$F(0) = 0 - 1 + k = k - 1$, et $k - 1 = 4$ donne $k = 5$.
Donc $F(x) = 3x^2 - e^x + 5$ (unique).

Attention — écrire $F(x_0) = y_0$ sans la constante k ne mène à rien ; et $e^0 = 1$, pas 0.

Les pièges

- Oublier la constante : « les primitives » s'écrivent F(x) + k, $k \in \mathbb{R}$.
- Primitive de sin : $-\cos$ (et non cos) ; primitive de cos : sin.
- $1/x^2$ a pour primitive $-1/x$, pas $\ln(x^2)$; $1/(x^2+1)$ n'a pas pour primitive $\ln(x^2+1)$.
- On ajuste une constante ($x = ½ \times 2x$), jamais un x.
- ln u exige $u > 0$ sur l'intervalle ; sur $]-\infty\,;0[$, une primitive de $1/x$ est $\ln(-x)$.
- La primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives : on développe, on reconnaît $u'e^u$… ou on identifie.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).