

Devoir surveillé – Primitives

Notion de primitive, primitives des fonctions usuelles, primitives de $u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u'/\sqrt{u}$, primitive vérifiant une condition initiale, lien avec les équations différentielles $y' = f$

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Primitives usuelles

(4 pts)

- | | |
|--|---|
| a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = 7x^6 - 4x^3 + 2$. | c) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(x) = -6 \sin x + e^x$. |
| b) Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de $g(x) = \frac{5}{x} - \frac{2}{x^3}$. | d) Déterminer une primitive sur $]0; +\infty[$ de $k(x) = \frac{8}{\sqrt{x}}$. |

Exercice 2 – Formes composées

(4 pts)

- a) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = (5x - 3)^6$.
- b) Déterminer une primitive sur $] - 2; +\infty[$ de $g(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 8}$.
- c) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $h(x) = e^{1-7x}$.
- d) Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $k(x) = \frac{4x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 3}}$, après avoir justifié que $x^2 + x + 3 > 0$.

Exercice 3 – Condition initiale

(4 pts)

- a) Justifier que $f(x) = \frac{2}{2x + 5}$ admet des primitives sur $] - \frac{5}{2}; +\infty[$ et les déterminer.
- b) Déterminer la primitive F de f telle que $F(-2) = 6$.
- c) Donner la valeur exacte de $F(0)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.
- d) Résoudre l'équation différentielle $y' = f$ sur $] - \frac{5}{2}; +\infty[$ avec la condition $y(10) = 0$.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? Justifier

(4 pts)

- a) « $F(x) = (x + 1)e^x$ est une primitive de $f(x) = (x + 2)e^x$ sur $\mathbb{R}$. »
- b) « Si F et G sont deux primitives d'une même fonction sur $\mathbb{R}$, alors $F - G$ est la fonction nulle. »
- c) « Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(3x + 1)^2}$ sur $] - \frac{1}{3}; +\infty[$ est $x \mapsto \ln((3x + 1)^2)$. »
- d) « Il existe une primitive de $\cos$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 3 en 0 et 5 en $\frac{\pi}{2}$. »

Exercice 5 – Primitive par identification

(4 pts)

Soit $f(x) = 2 \ln x + 5$ sur $]0; +\infty[$ et $F(x) = ax \ln x + bx$, où a et b sont des réels. a) Calculer $F'(x)$.

- a) Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
- b) En déduire la primitive G de f telle que $G(1) = 0$.
- c) Étudier le signe de f et en déduire les variations de G sur $]0; +\infty[$.

Bon courage !

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).