

Corrigé et barème – Primitives

Notion de primitive, primitives des fonctions usuelles, primitives de $u'u^n$, u'/u , $u'e^u$, $u'/\sqrt{u}$, primitive vérifiant une condition initiale, lien avec les équations différentielles $y' = f$

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Primitives usuelles

(4 pts)

- a) $F(x) = x^7 - x^4 + 2x$. (1)
- b) $\frac{1}{x^2}$ a pour primitive $-\frac{1}{2x^2}$, donc $G(x) = 5 \ln x + \frac{1}{x^2}$. (1)
- c) $H(x) = 6 \cos x + e^x$ (car $(\cos x)' = -\sin x$). (1)
- d) $K(x) = 16\sqrt{x}$ (car $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$). (1)

Erreur fréquente — Pour $\frac{1}{x^3}$, on écrit x^{-3} et on applique $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ avec $n = -3$: le résultat n'a rien à voir avec un logarithme.

Exercice 2 – Formes composées

(4 pts)

- a) $u = 5x - 3$, $u' = 5$: $f = \frac{1}{5}u'u^6$, donc $F(x) = \frac{(5x-3)^7}{35}$. (1)
- b) $u = x^3 + 8 > 0$ pour $x > -2$ et $u' = 3x^2$: $g = \frac{u'}{u}$, donc $G(x) = \ln(x^3 + 8)$. (1)
- c) $u = 1 - 7x$, $u' = -7$: $h = -\frac{1}{7}u'e^u$, donc $H(x) = -\frac{1}{7}e^{1-7x}$. (1)
- d) $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$ et coefficient $1 > 0$, donc $x^2 + x + 3 > 0$. $u' = 2x + 1$ et $k = 2\frac{u'}{\sqrt{u}}$: $K(x) = 4\sqrt{x^2 + x + 3}$. (1)

À retenir — On ajuste toujours la constante multiplicative pour faire apparaître exactement u' , puis on vérifie en dérivant.

Exercice 3 – Condition initiale

(4 pts)

- a) f est continue sur l'intervalle (quotient, $2x + 5 > 0$), donc admet des primitives. $u = 2x + 5$, $u' = 2$: $f = \frac{u'}{u}$, primitives $\ln(2x + 5) + k$. (1)
- b) $F(-2) = \ln 1 + k = k = 6$, donc $F(x) = \ln(2x + 5) + 6$. (1)
- c) $F(0) = 6 + \ln 5 \approx 7,61$. (1)
- d) $y(10) = \ln 25 + k = 0$ donne $k = -\ln 25$: $y(x) = \ln(2x + 5) - \ln 25 = \ln\left(\frac{2x+5}{25}\right)$. (1)

Repère — Une condition initiale donne toujours une équation du premier degré en k : on la résout, puis on écrit l'expression complète de la solution.

Exercice 4 – Vrai ou faux ? Justifier

(4 pts)

- a) Vrai : $F'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$. (1)
- b) Faux : $F - G$ est constante mais pas forcément nulle. Contre-exemple : e^x et $e^x + 4$ sont deux primitives de e^x . (1)
- c) Faux : $\ln((3x+1)^2) = 2\ln(3x+1)$ a pour dérivée $\frac{6}{3x+1}$. Une primitive correcte est $-\frac{1}{3(3x+1)}$. (1)
- d) Faux : $F(x) = \sin x + k$; $F(0) = 3$ impose $k = 3$, et alors $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \neq 5$. (1)

Le point clé — Pour prouver « faux », un seul contre-exemple ou un seul calcul de dérivée suffit ; pour prouver « vrai », il faut un argument valable pour tout x .

Exercice 5 – Primitive par identification*(4 pts)*

- a) $F'(x) = a \ln x + ax \times \frac{1}{x} + b = a \ln x + a + b$. (1)
- b) Pour tout $x > 0$: $a \ln x + a + b = 2 \ln x + 5$; on identifie $a = 2$ et $a + b = 5$, soit $b = 3$. $F(x) = 2x \ln x + 3x$. (1)
- c) $G = F + k$ et $F(1) = 0 + 3 = 3$, donc $k = -3$: $G(x) = 2x \ln x + 3x - 3$. (1)
- d) $f(x) > 0 \iff \ln x > -\frac{5}{2} \iff x > e^{-5/2} \approx 0,082$. Comme $G' = f$: G décroissante sur $]0; e^{-5/2}]$, croissante sur $[e^{-5/2}; +\infty[$. (1)

Attention — Pour identifier des coefficients, l'égalité doit être vraie pour tout x de l'intervalle : on compare alors les coefficients de $\ln x$ et les constantes.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).