

Devoir surveillé – Nombres complexes

Forme algébrique, conjugué, module, plan complexe et équations du second degré — chapitre d'approfondissement (maths expertes)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Calculs sous forme algébrique

(4 pts)

- a) a) Écrire $z_1 = (3 - 5i) + (-2 + 8i)$ sous forme algébrique.
- b) b) Développer et réduire $(4 + 3i)(2 - 5i)$.
- c) c) Calculer i^{1003} .
- d) d) Écrire $\frac{5 - i}{3 + 2i}$ sous forme algébrique.

Exercice 2 – Conjugué et module

(4 pts)

On pose $z = -4 + 7i$.

- a) a) Donner $\bar{z}$ et calculer $z\bar{z}$.
- b) b) En déduire $|z|$.
- c) c) Calculer $\left| \frac{z}{1 - i} \right|$ sous forme exacte.
- d) d) Montrer que, pour tout complexe w , les nombres $w + \bar{w}$ et $w\bar{w}$ sont réels.

Exercice 3 – Équations et factorisation

(4 pts)

- a) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z + 25 = 0$.
- b) b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 4z + 5 = 0$.
- c) c) On pose $P(z) = z^3 - 2z^2 + 9z - 18$. Vérifier que 2 est une racine de P , puis montrer que $P(z) = (z - 2)(z^2 + 9)$ pour tout z .
- d) d) En déduire toutes les solutions de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 – Dans le plan complexe

(4 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les points A , B et C ont pour affixes $z_A = -1 - 2i$, $z_B = 5 + 6i$ et $z_C = 7 + 2i$.

- a) a) Calculer la distance AB .
- b) b) Déterminer l'abscisse du milieu I de $[AB]$.
- c) c) Calculer AC et BC , puis montrer que le triangle ABC est rectangle en C .
- d) d) Déterminer l'abscisse du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

Exercice 5 – Ensembles de points et esprit critique*(4 pts)*

Le plan est muni d'un repère orthonormé ; M désigne le point d'affixe z .

- a) a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $|z - 2 + 5i| = 4$.
- b) b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M tels que $|z - 6i| = |z + 4|$.
- c) c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{G}$ des points M tels que $z - \bar{z} = 8i$.
- d) d) Un élève affirme : « l'équation $|z| = -3$ admet deux solutions, 3 et -3 ». Expliquer son erreur et donner l'ensemble des solutions.

Bon courage !