

Corrigé et barème – Nombres complexes

Forme algébrique, conjugué, module, plan complexe et équations du second degré — chapitre d'approfondissement (maths expertes)

Durée : 120 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Calculs sous forme algébrique

(4 pts)

- a) $z_1 = (3 - 2) + (-5 + 8)i = 1 + 3i$. (1)
- b) $(4 + 3i)(2 - 5i) = 8 - 20i + 6i - 15i^2 = 8 - 14i + 15 = 23 - 14i$. (1)
- c) $1003 = 4 \times 250 + 3$, donc $i^{1003} = i^3 = -i$. (1)
- d) $\frac{5-i}{3+2i} = \frac{(5-i)(3-2i)}{9-4} = \frac{15-10i-3i-2}{13} = \frac{13-13i}{13} = 1 - i$. (1)

Erreur fréquente — Un produit se développe comme dans $\mathbb{R}$, mais tout terme en i^2 doit être remplacé par -1 , ce qui change le signe de la partie réelle.

Exercice 2 – Conjugué et module

(4 pts)

- a) $\bar{z} = -4 - 7i$ et $z\bar{z} = (-4)^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$. (1)
- b) $|z|^2 = z\bar{z} = 65$, et $|z| \geq 0$, donc $|z| = \sqrt{65}$. (1)
- c) $|1 - i| = \sqrt{2}$, donc $\left|\frac{z}{1-i}\right| = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{130}}{2}$. (1)
- d) Avec $w = a + ib$ (a, b réels) : $w + \bar{w} = 2a$ et $w\bar{w} = a^2 + b^2$; ces deux nombres ont une partie imaginaire nulle, ils sont donc réels. (1)

Le point clé — La relation $|z|^2 = z\bar{z}$ évite les racines carrées : on calcule d'abord le carré du module, on conclut ensuite.

Exercice 3 – Équations et factorisation

(4 pts)

- a) $\Delta = 64 - 100 = -36 < 0$, donc $z = \frac{8 \pm 6i}{2}$: les solutions sont $4 + 3i$ et $4 - 3i$. (1)
- b) $\Delta = 16 - 80 = -64 < 0$, donc $z = \frac{-4 \pm 8i}{8}$: les solutions sont $-\frac{1}{2} + i$ et $-\frac{1}{2} - i$. (1)
- c) $P(2) = 8 - 8 + 18 - 18 = 0$. En développant : $(z - 2)(z^2 + 9) = z^3 + 9z - 2z^2 - 18 = z^3 - 2z^2 + 9z - 18 = P(z)$. (1)
- d) $P(z) = 0$ équivaut à $z = 2$ ou $z^2 = -9 = (3i)^2$: les solutions sont $2, 3i$ et $-3i$. (1)

Attention — Un discriminant négatif ne signifie jamais « pas de solution » dans $\mathbb{C}$: il annonce deux solutions conjuguées.

Exercice 4 – Dans le plan complexe

(4 pts)

- a) $z_B - z_A = 6 + 8i$, donc $AB = \sqrt{36 + 64} = 10$. (1)
- b) $z_I = \frac{(-1-2i)+(5+6i)}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i$. (1)
- c) $z_C - z_A = 8 + 4i$ donc $AC = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$; $z_B - z_C = -2 + 4i$ donc $BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Alors $AC^2 + BC^2 = 80 + 20 = 100 = AB^2$: d'après la réciproque de Pythagore, le triangle est rectangle en C . (1)
- d) $z_D - z_A = z_B - z_C = -2 + 4i$, donc $z_D = (-1 - 2i) + (-2 + 4i) = -3 + 2i$. (1)

Repère — Une distance se lit toujours comme le module de la différence des affixes, dans l'ordre « arrivée moins départ ».

Exercice 5 – Ensembles de points et esprit critique*(4 pts)*

- a) $|z - (2 - 5i)| = 4$: $\mathcal{E}$ est le cercle de centre le point d'affixe $2 - 5i$ et de rayon 4. (1)
- b) $|z - 6i| = |z - (-4)|$ signifie $AM = BM$ avec A d'affixe $6i$ et B d'affixe -4 : $\mathcal{F}$ est la médiatrice de $[AB]$. Avec $z = x + iy$: $x^2 + (y - 6)^2 = (x + 4)^2 + y^2$, soit $-12y + 36 = 8x + 16$, d'où $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. (1)
- c) Avec $z = x + iy$, $z - \bar{z} = 2iy$; l'équation $2iy = 8i$ donne $y = 4$: $\mathcal{G}$ est la droite d'équation $y = 4$, parallèle à l'axe des abscisses. (1)
- d) Un module est par définition $\sqrt{a^2 + b^2}$, donc un réel positif ou nul : il ne peut jamais valoir -3 .
L'élève a confondu module et carré (ou module et solution d'une équation en z). L'ensemble des solutions est vide. (1)

À retenir — Avant tout calcul, ramener la condition à la forme $|z - z_A| = r$ ou $|z - z_A| = |z - z_B|$: la nature de l'ensemble se lit alors immédiatement.