Concentration et loi des grands nombres

Fiche méthode

(Spécialité maths Terminale · Probabilités)

La démarche face à une question d'écart

1. Je repère la variable : une seule observation X (Bienaymé-Tchebychev) ou la moyenne M_n d'un échantillon (concentration).

2. Je calcule μ et la variance : formules de la loi ou données de l'énoncé ; un écart type s'élève au carré.

3. J'écris l'événement sous la forme $|\dots - \mu| \geqslant \delta$, en passant au contraire si l'on demande « au moins » sur un intervalle.

4. J'applique et je conclus par une phrase : « au plus… » pour un majorant, « au moins… » pour le contraire.

Le réflexe — l'inégalité utilisée se nomme (« d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev », « d'après l'inégalité de concentration ») et le résultat est un majorant : écrire « $=$ » à la place de « $\leq$ » coûte des points.

Cas 1 · Majorer avec Bienaymé-Tchebychev

Réflexe — μ, puis V(X) ; événement $|X - \mu| \geq \delta$; majorant $V(X)/\delta^2$.

Exemple. Questions types : « Majorer $P(|X - \mu| \geqslant \delta)$ ». Exemple : $E(X) = 64$, $\sigma(X) = 5$, majorer $P(X \leqslant 54 \text{ ou } X \geqslant 74)$.

L'événement est $|X - 64| \geqslant 10$: c'est un écart de $\delta = 10$.

$V(X) = 5^2 = 25$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\left(|X - 64| \geqslant 10\right) \leqslant \dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

Attention — on divise la variance, pas l'écart type ; et le résultat se lit « au plus 0,25 ».

Cas 2 · Minorer la probabilité d'un intervalle

Réflexe — intervalle centré en μ, contraire, $1 - V/\delta^2$; intervalle d'un seul côté : je l'inclus dans $|X - \mu| \geq \delta$.

Exemple. Questions types : « Justifier que la probabilité que X soit strictement comprise entre … et … est d'au moins … ». Exemple : $E(X) = 18$, $V(X) = 3$, montrer que $P(15 < X < 21) \geqslant \dfrac{2}{3}$.

$15 < X < 21 \iff |X - 18| < 3$: c'est le contraire de $|X - 18| \geqslant 3$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P\left(|X - 18| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

Donc $P(15 < X < 21) \geqslant 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Attention — le contraire de « $\geq \delta$ » est « $< \delta$ » : bornes exclues.

Cas 3 · Inégalité de concentration

Réflexe — variable d'une observation (μ, V), taille n, écart δ ; majorant $V/(n\delta^2)$.

Exemple. Questions types : « Majorer la probabilité que la moyenne s'écarte de … d'au moins … ». Exemple : 40 observations d'une variable d'espérance 3 et de variance 1,8, écart $\delta = 0{,}3$.

M_{40} est la moyenne d'un échantillon de taille 40 : $E(M_{40}) = 3$ et $V(M_{40}) = \dfrac{1{,}8}{40} = 0{,}045$.

D'après l'inégalité de concentration, $P\left(|M_{40} - 3| \geqslant 0{,}3\right) \leqslant \dfrac{1{,}8}{40 \times 0{,}09} = \dfrac{1{,}8}{3{,}6} = 0{,}5$.

Attention — oublier de diviser par n donne un majorant n fois trop grand.

Cas 4 · Loi des grands nombres

Réflexe — encadrement $0 \leq P \leq V/(n\delta^2)$, puis gendarmes ; interprétation : moyenne → espérance, fréquence → probabilité.

Exemple. Questions types : « Vers quelle valeur se stabilise la moyenne ? », « Justifier que $P(|M_n - \mu| \geqslant \delta)$ tend vers 0 ». Exemple : gain G d'un jeu, $G = 5$ avec probabilité 0,1 et $G = -1$ sinon.

$E(G) = 5 \times 0{,}1 + (-1) \times 0{,}9 = 0{,}5 - 0{,}9 = -0{,}4$.

D'après la loi faible des grands nombres, le gain moyen sur n parties indépendantes se rapproche de $-0{,}4$ € quand n grandit : à long terme, le joueur perd en moyenne 0,40 € par partie.

Attention — la loi ne dit pas que la moyenne devient égale à μ ni qu'un écart passé sera compensé.

Cas 5 · Taille d'échantillon

Réflexe — $V/(n\delta^2) \leq \alpha$, donc $n \geq V/(\alpha\delta^2)$, entier supérieur ; p inconnu : $V = 1/4$.

Exemple. Questions types : « Déterminer une taille d'échantillon qui garantit … ». Exemple : proportion inconnue, précision 0,05, probabilité d'au moins 0,9.

Risque $\alpha = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, précision $\delta = 0{,}05$, $V = p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Il suffit que $\dfrac{0{,}25}{n \times 0{,}0025} \leqslant 0{,}1$, soit $n \geqslant \dfrac{0{,}25}{0{,}1 \times 0{,}0025} = 1\,000$.

Un échantillon de 1 000 personnes convient, quelle que soit p.

Attention — on arrondit toujours à l'entier supérieur, même pour 640,2.

Les pièges

- Variance et écart type : dans V/δ^2, V est la variance ($\sigma = 6$ donne $V = 36$).
- Majorant ≥ 1 : l'inégalité est vraie mais inutile ; cela arrive dès que $\delta \leq \sigma$.
- Écrire « $P = 0{,}32$ » après l'inégalité est faux : on écrit « $P \leq 0{,}32$ ».
- Contraire de $|X - \mu| \geq \delta$: $\mu - \delta < X < \mu + \delta$, bornes exclues.
- Échantillon : les X_i doivent être indépendantes et de même loi.
- Pas de « compensation » : après une série de piles, face garde la probabilité 0,5.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).