Concentration et loi des grands nombres

Fiche tableaux : les inégalités à connaître
(Spécialité maths Terminale)

Les deux inégalités

Inégalité	Variable	Majorant de $P(\lvert \dots - \mu \rvert \geqslant \delta)$	Minorant du contraire
Bienaymé-Tchebychev	X, espérance μ, variance $V(X)$	$\dfrac{V(X)}{\delta^2}$	$P(\mu - \delta < X < \mu + \delta) \geqslant 1 - \dfrac{V(X)}{\delta^2}$
Concentration	M_n, moyenne d'un échantillon de taille n	$\dfrac{V}{n\delta^2}$	$P(\lvert M_n - \mu \rvert < \delta) \geqslant 1 - \dfrac{V}{n\delta^2}$

Exemple : $E(X) = 35$, $V(X) = 4{,}5$, $\delta = 3$: majorant $\dfrac{4{,}5}{9} = 0{,}5$.

Écarts en nombre d'écarts types

$\delta = k\sigma$ **avec** $k =$	1	2	3	4	5	10
Majorant $\dfrac{1}{k^2}$	1 (inutile)	0,25	$\dfrac{1}{9} \approx 0{,}111$	0,0625	0,04	0,01
Minorant du contraire	0	0,75	$\dfrac{8}{9} \approx 0{,}889$	0,9375	0,96	0,99

Exemple : X reste à moins de 5 écarts types de son espérance avec une probabilité d'au moins 96 %, quelle que soit sa loi.

Moyenne, fréquence et loi des grands nombres

Observation X_i	μ	V	M_n	**Quand** $n \to +\infty$
Quelconque	$E(X)$	$V(X)$	moyenne, $V(M_n) = \dfrac{V}{n}$	$P(\lvert M_n - \mu \rvert \geqslant \delta) \to 0$
Bernoulli de paramètre p	p	$p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$	fréquence F_n	$P(\lvert F_n - p \rvert \geqslant \delta) \to 0$

Exemple : une urne contient 7 boules blanches sur 20 ; tirées avec remise, la fréquence des blanches se stabilise autour de 0,35.

Trouver une taille, une précision ou un risque

On cherche	On connaît	Formule
la taille n	V, δ, α	$n \geqslant \dfrac{V}{\alpha\delta^2}$ (entier supérieur)
la précision δ	V, n, α	$\delta = \sqrt{\dfrac{V}{n\alpha}}$
le risque α	V, n, δ	$\alpha = \dfrac{V}{n\delta^2}$
la taille, p inconnu	δ, α	$n \geqslant \dfrac{1}{4\alpha\delta^2}$

Exemple : $V = 6$, $\delta = 0{,}2$, $\alpha = 0{,}05$: $n \geqslant \dfrac{6}{0{,}05 \times 0{,}04} = 3\,000$.

Lire les événements

Écriture	Signification
$\lvert X-\mu\rvert \geqslant \delta$	$X \leqslant \mu-\delta$ ou $X \geqslant \mu+\delta$
$\lvert X-\mu\rvert < \delta$	$\mu-\delta < X < \mu+\delta$
$X \geqslant a$ avec $a > \mu$	contenu dans $\lvert X-\mu\rvert \geqslant a-\mu$
X entière, $\lvert X-\mu\rvert < \delta$	entiers strictement entre $\mu-\delta$ et $\mu+\delta$

Exemple : pour $\mu = 75$, « $X \leqslant 66$ ou $X \geqslant 84$ » est $\lvert X-75\rvert \geqslant 9$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).