

Devoir surveillé – Concentration et loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration, loi faible des grands nombres et échantillonnage (programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (4 pts)

- a) a) Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 45$ et $V(X) = 30$. Majorer $P(|X - 45| \geq 12)$ (arrondi au millièmè).
- b) b) Écrire l'événement « $|X - 45| \geq 12$ » à l'aide de conditions sur X .
- c) c) En déduire une minoration de $P(33 < X < 57)$.
- d) d) Déterminer la valeur de δ pour laquelle le majorant $\frac{V(X)}{\delta^2}$ vaut 0,12 (arrondi au dixième).

Exercice 2 – Loi binomiale (4 pts)

- a) a) Y suit la loi $\mathcal{B}(160; 0,15)$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
- b) b) Majorer $P(|Y - 24| \geq 11)$ (arrondi au millièmè).
- c) c) Justifier que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne donne aucune information pour $\delta = 4$.
- d) d) Déterminer le plus petit entier δ pour lequel le majorant de $P(|Y - 24| \geq \delta)$ est inférieur ou égal à 0,1.

Exercice 3 – Inégalité de concentration (4 pts)

- a) a) Le temps de trajet quotidien (en minutes) d'un salarié est une variable d'espérance 32 et d'écart-type 7. Sur 140 trajets indépendants, on note M_{140} le temps moyen. Déterminer $E(M_{140})$ et $V(M_{140})$.
- b) b) Majorer $P(|M_{140} - 32| \geq 1,4)$ (arrondi au millièmè).
- c) c) Déterminer le nombre minimal de trajets n garantissant $P(|M_n - 32| \geq 1,4) \leq 0,015$.
- d) d) Un élève écrit : « $P(|M_{140} - 32| \geq 1,4) \leq \frac{49}{1,96} = 25$ ». Expliquer son erreur.

Exercice 4 – Estimation d'une proportion (4 pts)

- a) a) Une proportion $p = 0,38$ des clients d'une enseigne se déclarent satisfaits. On interroge n clients de manière indépendante ; X_i vaut 1 si le i -ième client est satisfait, 0 sinon. Donner la loi de X_i , $E(X_i)$ et $V(X_i)$.
- b) b) Pour $n = 1\,200$, majorer $P(|F_{1200} - 0,38| \geq 0,045)$, où F_n est la fréquence des clients satisfaits (arrondi au millièmè).
- c) c) On suppose maintenant p inconnu. Déterminer une taille n garantissant $P(|F_n - p| \geq 0,045) \leq 0,06$ quelle que soit la valeur de p .
- d) d) D'après la loi des grands nombres, vers quelle valeur F_n se stabilise-t-elle quand n grandit (avec $p = 0,38$) ? Peut-on affirmer que $F_{1200} = 0,38$? Justifier.

Exercice 5 – Majorant et valeur exacte*(4 pts)*

- a) a) Une variable Z prend les valeurs 2, 5 et 11 avec les probabilités 0,5 ; 0,3 ; 0,2. Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
- b) b) Calculer la valeur exacte de $P(|Z - 4,7| \geq 3,7)$, puis le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (arrondi au millième).
- c) c) On effectue 350 tirages indépendants de Z ; M_{350} est leur moyenne. Majorer $P(|M_{350} - 4,7| \geq 0,55)$ (arrondi au millième).
- d) d) Un élève conclut de la question b) : « L'événement $|Z - 4,7| \geq 3,7$ a environ 85 % de chances de se produire. » Expliquer l'erreur.

Bon courage !