

Corrigé et barème – Concentration et loi des grands nombres

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration, loi faible des grands nombres et échantillonnage (programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

(4 pts)

- a) $P(|X - 45| \geq 12) \leq \frac{30}{144} \approx 0,208$. (1)
- b) $X \leq 33$ ou $X \geq 57$. (1)
- c) Événement contraire : $P(33 < X < 57) \geq 1 - \frac{30}{144} \approx 0,792$. (1)
- d) $\frac{30}{\delta^2} = 0,12 \iff \delta^2 = 250 \iff \delta = \sqrt{250} \approx 15,8$. (1)

Repère — L'événement $|X - \mu| \geq \delta$ est une réunion de deux demi-droites fermées ; son contraire est un intervalle ouvert centré en μ .

Exercice 2 – Loi binomiale

(4 pts)

- a) $E(Y) = 160 \times 0,15 = 24$; $V(Y) = 160 \times 0,15 \times 0,85 = 20,4$. (1)
- b) $P(|Y - 24| \geq 11) \leq \frac{20,4}{121} \approx 0,169$. (1)
- c) $\frac{20,4}{16} = 1,275 > 1$: le majorant dépasse 1, ce qu'on savait déjà pour toute probabilité ($\delta = 4 < \sigma \approx 4,52$). (1)
- d) $\frac{20,4}{\delta^2} \leq 0,1 \iff \delta^2 \geq 204 \iff \delta \geq 14,28$; le plus petit entier est $\delta = 15$. (1)

Attention — L'inégalité n'est utile que si $\delta > \sigma$: en dessous, le majorant dépasse 1.

Exercice 3 – Inégalité de concentration

(4 pts)

- a) $E(M_{140}) = 32$; $V(M_{140}) = \frac{49}{140} = 0,35$. (1)
- b) $P(|M_{140} - 32| \geq 1,4) \leq \frac{0,35}{1,96} \approx 0,179$. (1)
- c) $\frac{49}{1,96n} \leq 0,015 \iff n \geq \frac{49}{0,0294} \approx 1\,666,7$: il faut $n = 1\,667$ trajets. (1)
- d) Il a utilisé $V(X) = 49$ au lieu de $V(M_{140}) = \frac{49}{140}$: la variance d'une moyenne est divisée par n . Un majorant de 25 pour une probabilité est d'ailleurs absurde. (1)

Erreur fréquente — Oublier de diviser la variance par n dans l'inégalité de concentration donne un majorant n fois trop grand.

Exercice 4 – Estimation d'une proportion

(4 pts)

- a) Loi de Bernoulli de paramètre 0,38 ; $E(X_i) = 0,38$; $V(X_i) = 0,38 \times 0,62 = 0,2356$. (1)
- b) $P(|F_{1200} - 0,38| \geq 0,045) \leq \frac{0,2356}{1\,200 \times 0,002025} = \frac{0,2356}{2,43} \approx 0,097$. (1)
- c) $V = p(1 - p) \leq \frac{1}{4}$; il suffit que $\frac{0,25}{0,002025n} \leq 0,06$, soit $n \geq \frac{0,25}{0,0001215} \approx 2\,057,6$: $n = 2\,058$ convient. (1)
- d) F_n se stabilise autour de $p = 0,38$ ($P(|F_n - 0,38| \geq \delta) \rightarrow 0$). Non : F_{1200} reste aléatoire ; la loi ne donne qu'une probabilité d'écart qui diminue, jamais une égalité certaine. (1)

Le point clé — Quand p est inconnu, on majore $p(1 - p)$ par $\frac{1}{4}$: la taille obtenue convient pour toute valeur de p .

Exercice 5 – Majorant et valeur exacte*(4 pts)*

- a) $E(Z) = 1 + 1,5 + 2,2 = 4,7$; $E(Z^2) = 2 + 7,5 + 24,2 = 33,7$; $V(Z) = 33,7 - 22,09 = 11,61$. (1)
- b) $|Z - 4,7| \geq 3,7 \iff Z \leq 1 \text{ ou } Z \geq 8,4 \iff Z = 11$: probabilité exacte 0,2. Majorant : $\frac{11,61}{13,69} \approx 0,848$. (1)
- c) $V(M_{350}) = \frac{11,61}{350} \approx 0,03317$; $P(|M_{350} - 4,7| \geq 0,55) \leq \frac{0,03317}{0,3025} \approx 0,110$. (1)
- d) 0,848 est un majorant, pas la probabilité : la valeur exacte est 0,2. L'inégalité dit « au plus 0,848 », ce qui est vrai mais très grossier ici. (1)

À retenir — Une inégalité de concentration donne un majorant valable pour toutes les lois de même espérance et variance ; la probabilité réelle peut être bien plus petite.