

Loi binomiale

La loi binomiale modélise le nombre de succès quand on répète une même expérience à deux issues : il faut savoir la reconnaître, calculer $P(X=k)$, $E(X)$ et $\sigma(X)$, et résoudre les questions de seuil.

1 Définitions

- **Épreuve de Bernoulli** : expérience à deux issues, succès de probabilité p , échec de probabilité $1-p$.
- **Loi de Bernoulli** : $X \in \{0, 1\}$, $P(X=1)=p$, $E(X)=p$, $V(X)=p(1-p)$.
- **Schéma de Bernoulli** : répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (n fixé).
- **Loi binomiale $B(n; p)$** : loi du nombre de succès X d'un schéma de Bernoulli.
- **Coefficient binomial $\binom{n}{k}$** : nombre de chemins de l'arbre comportant exactement k succès.

2 Formules

- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$.
- $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$; $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$; $P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$; $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a-1)$.
- $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$; $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

3 Méthodes

1. **Justifier une loi binomiale** : nommer le succès et p ; vérifier « n répétitions identiques et indépendantes » (avec remise ou population très grande) ; conclure $X \sim B(n; p)$.
2. **Calculer une probabilité** : formule pour $P(X=k)$; calculatrice (binomFdp, binomFRép) pour $P(X \leq k)$; passage au contraire pour $P(X \geq k)$.
3. **Trouver un seuil en k** : tableau de valeurs de $P(X \leq k)$, citer les deux valeurs qui encadrent α .
4. **Trouver n minimal** : $1 - (1-p)^n \geq \alpha$; logarithme ; division par $\ln(1-p) < 0$ en changeant le sens ; plus petit entier et vérification.

4 Démonstration exigible

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$: l'événement $X=k$ réunit les issues à k succès ; par indépendance, chacune a pour probabilité $p^k (1-p)^{n-k}$; ces issues sont incompatibles et il y en a $\binom{n}{k}$; on additionne.

5 Pièges

- Tirage **sans remise** : pas d'indépendance, pas de loi binomiale (sauf population très grande, hypothèse à citer).
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$: décalage d'indice.
- p est la probabilité de ce que l'on **compte**, même petite.
- $\sigma(X)$ est la racine carrée de $np(1-p)$, pas $np(1-p)$.
- Comparer les valeurs non arrondies au seuil ; ne pas arrondir avant le dernier calcul.

L'ESSENTIEL

- Schéma de Bernoulli : n épreuves à deux issues, identiques et indépendantes, de probabilité de succès p .
- Si X suit $B(n; p)$, alors $P(X = k) = (k \text{ parmi } n) \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.

- $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ et $P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$.
- Pour trouver n minimal : inéquation, logarithme, division par $\ln(1-p) < 0$ qui change le sens.