

Devoir surveillé – Loi binomiale

Modélisation des épreuves répétées : schéma de Bernoulli, espérance et écart-type (programme de Terminale Spécialité Maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Tirs à l'arc

(4 pts)

- a) Un archer vise le centre d'une cible ; chaque flèche l'atteint avec probabilité 0,45, les tirs étant indépendants. Il tire 7 flèches ; soit X le nombre de flèches ayant atteint le centre.
- a) Quelle est la loi de X ? Justifier la réponse.
- b) b) Calculer $P(X = 3)$, arrondi au millièm.
- c) c) Quelle est la probabilité qu'une flèche au moins atteigne le centre ? Arrondir au millièm.
- d) d) Donner l'espérance de X et son écart-type arrondi au centièm.

Exercice 2 – Chemins de l'arbre

(4 pts)

- a) Une urne contient 2 boules noires et 3 boules blanches. On tire 4 fois de suite une boule avec remise ; X compte les boules noires obtenues.
- a) Combien de chemins de l'arbre pondéré comportent exactement 2 boules noires ? Les lister.
- b) b) Calculer la probabilité de l'un de ces chemins.
- c) c) En déduire $P(X = 2)$.
- d) d) Dresser le tableau de la loi de X et contrôler que la somme des probabilités vaut 1.

Exercice 3 – Réclamations téléphoniques

(4 pts)

- a) Un standard reçoit 60 appels par jour. Un appel donné est une réclamation avec probabilité 0,12, et les appels sont indépendants entre eux. X désigne le nombre de réclamations reçues dans la journée.
- a) Préciser la loi de X , son espérance et son écart-type (au centièm).
- b) b) Calculer la probabilité de recevoir exactement 7 réclamations, arrondie au millièm.
- c) c) Calculer la probabilité de recevoir au moins 10 réclamations, arrondie au millièm.
- d) d) Quel est le plus petit entier k vérifiant $P(X \leq k) \geq 0,95$? Citer les deux valeurs qui encadrent le seuil.

Exercice 4 – Visiteurs d'un site marchand

(4 pts)

- a) Sur un site marchand, un visiteur donné effectue un achat avec probabilité 0,04 ; les comportements des visiteurs sont indépendants. Soit X_n le nombre d'acheteurs parmi n visiteurs.
- a) Donner, en fonction de n , la probabilité qu'aucun visiteur n'achète, puis celle qu'il y ait au moins un acheteur.
- b) À partir de quel nombre de visiteurs a-t-on $P(X_n \geq 1) \geq 0,95$?
- c) Pour $n = 50$, un élève écrit « $P(X_{50} \geq 2) = 1 - P(X_{50} \leq 2) \approx 0,323$ ». Où est la faute ? Donner la bonne valeur à 10^{-3} près.
- d) Après une refonte du site, on souhaite que, pour 50 visiteurs, le nombre moyen d'acheteurs soit égal à 3. Quelle doit être la nouvelle probabilité d'achat p ? Calculer alors l'écart-type de X_{50} (arrondi au centième).

Exercice 5 – Démonstration et raisonnement

(4 pts)

- a) Soit X une variable aléatoire suivant $\mathcal{B}(n; p)$, où $0 < p < 1$.
- a) Démontrer la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, valable pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$.
- b) Montrer que $\frac{P(X = 1)}{P(X = 0)} = \frac{np}{1 - p}$.
- c) On suppose $p = 0,2$ et $P(X = 1) = 2 P(X = 0)$. Déterminer n .
- d) Pour cette valeur de n , calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ puis $P(X \geq 2)$, arrondis au millièm.

Bon courage !