

Corrigé et barème – Loi binomiale

Modélisation des épreuves répétées : schéma de Bernoulli, espérance et écart-type (programme de Terminale Spécialité Maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Tirs à l'arc

(4 pts)

- a) Un tir = épreuve de Bernoulli (succès « centre atteint », $p = 0,45$), répétée 7 fois de façon identique et indépendante : X suit $\mathcal{B}(7; 0,45)$. (1)
- b) $P(X = 3) = \binom{7}{3} \times 0,45^3 \times 0,55^4 = 35 \times 0,091\,125 \times 0,091\,506 \approx 0,292$. (1)
- c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^7 \approx 1 - 0,0152 = 0,985$. (1)
- d) $E(X) = 7 \times 0,45 = 3,15$; $V(X) = 7 \times 0,45 \times 0,55 = 1,7325$; $\sigma(X) = \sqrt{1,7325} \approx 1,32$. (1)

Repère — Justifier une loi binomiale, c'est citer les deux issues, le nombre fixé de répétitions et l'indépendance avant d'écrire les paramètres.

Exercice 2 – Chemins de l'arbre

(4 pts)

- a) $\binom{4}{2} = 6$ chemins : NNBB, NBNB, NBBN, BNNB, BBNB, BBNN. (1)
- b) Probabilité d'une boule noire 0,4, d'une blanche 0,6 : chaque chemin a pour probabilité $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$. (1)
- c) $P(X = 2) = 6 \times 0,0576 = 0,3456$. (1)
- d) $P(X = 0) = 0,6^4 = 0,1296$; $P(X = 1) = 4 \times 0,4 \times 0,6^3 = 0,3456$; $P(X = 2) = 0,3456$; $P(X = 3) = 4 \times 0,4^3 \times 0,6 = 0,1536$; $P(X = 4) = 0,4^4 = 0,0256$. Somme : $0,1296 + 0,3456 + 0,3456 + 0,1536 + 0,0256 = 1$. (1)

Le point clé — Toutes les issues à k succès ont la même probabilité ; le coefficient binomial ne fait que les compter.

Exercice 3 – Réclamations téléphoniques

(4 pts)

- a) X suit $\mathcal{B}(60; 0,12)$; $E(X) = 7,2$; $V(X) = 60 \times 0,12 \times 0,88 = 6,336$; $\sigma(X) \approx 2,52$. (1)
- b) $P(X = 7) = \binom{60}{7} \times 0,12^7 \times 0,88^{53} \approx 0,158$ (calculatrice). (1)
- c) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0,822 = 0,178$. (1)
- d) $P(X \leq 11) \approx 0,949 < 0,95$ et $P(X \leq 12) \approx 0,976 \geq 0,95$: $k = 12$. (1)

Attention — Comparer les valeurs non arrondies au seuil : 0,949 est strictement inférieur à 0,95, donc $k = 11$ ne convient pas.

Exercice 4 – Visiteurs d'un site marchand

(4 pts)

- a) X_n suit $\mathcal{B}(n; 0,04)$: $P(X_n = 0) = 0,96^n$ et $P(X_n \geq 1) = 1 - 0,96^n$. (1)
- b) $0,96^n \leq 0,05 \iff n \ln 0,96 \leq \ln 0,05 \iff n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,96} \approx 73,4$ (division par $\ln 0,96 < 0$) : $n = 74$. (1)
- c) Le contraire de $\{X \geq 2\}$ est $\{X \leq 1\}$, pas $\{X \leq 2\}$. $P(X_{50} \geq 2) = 1 - 0,96^{50} - 50 \times 0,04 \times 0,96^{49} \approx 1 - 0,1299 - 0,2706 = 0,600$. (1)
- d) $E(X_{50}) = 50p = 3$ donne $p = 0,06$; $\sigma(X_{50}) = \sqrt{50 \times 0,06 \times 0,94} = \sqrt{2,82} \approx 1,68$. (1)

Erreur fréquente — Écrire l'événement contraire en toutes lettres avant de calculer évite le décalage d'indice entre k et $k - 1$.

Exercice 5 – Démonstration et raisonnement*(4 pts)*

- a) $\{X = k\}$ est la réunion des issues à k succès et $n - k$ échecs ; par indépendance chacune a pour probabilité $p^k(1 - p)^{n-k}$; elles sont incompatibles et au nombre de $\binom{n}{k}$ (positions des succès) ; en sommant, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. (1)
- b) $P(X = 1) = np(1 - p)^{n-1}$ et $P(X = 0) = (1 - p)^n$, d'où $\frac{P(X=1)}{P(X=0)} = \frac{np(1-p)^{n-1}}{(1-p)^n} = \frac{np}{1-p}$. (1)
- c) $\frac{0,2n}{0,8} = 2 \iff 0,25n = 2 \iff n = 8$. (1)
- d) $P(X = 0) = 0,8^8 \approx 0,168$; $P(X = 1) = 8 \times 0,2 \times 0,8^7 \approx 0,336$ (bien le double) ; $P(X \geq 2) = 1 - 0,168 - 0,336 \approx 0,497$. (1)

À retenir — La démonstration exigible tient en trois arguments : même probabilité pour chaque chemin, chemins incompatibles, dénombrement par le coefficient binomial.