

Limites de suites

Dire vers quoi tend une suite, le prouver (récurrence, comparaison, encadrement) et étudier les suites $u(n+1) = f(u(n))$, du modèle d'évolution au sujet de bac.

1 Définitions

- **Converge vers L** : tout intervalle ouvert contenant L contient tous les u_n à partir d'un certain rang ; la limite est unique.
- **Tend vers $+\infty$** : tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tous les termes à partir d'un certain rang.
- **Divergente** = ne converge pas : limite infinie *ou* pas de limite, comme $(-1)^n$.

2 Limites de référence

- $n, n^2, n^3, \sqrt{n} \rightarrow +\infty$; $1/n, 1/n^2, 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$.
- q^n : $q > 1 \rightarrow +\infty$; $-1 < q < 1 \rightarrow 0$; $q = 1 \rightarrow 1$; $q \leq -1 \rightarrow$ pas de limite.
- **Bernoulli** : pour $a > 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$ (récurrence), d'où $q^n \rightarrow +\infty$ si $q > 1$.

3 Formes indéterminées

- **Quatre FI** : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ , $0/0$. Une FI se lève, elle ne se calcule pas.
- Factoriser par le **terme dominant** (plus haute puissance de n, plus grande base q^n) ou multiplier par le **conjugué** pour les racines.

4 Théorèmes

- **Comparaison** : $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty \Rightarrow u_n \rightarrow +\infty$ (démonstration exigible).
- **Gendarmes** : $a_n \leq u_n \leq b_n$ et $a_n, b_n \rightarrow L \Rightarrow u_n \rightarrow L$ (même limite finie obligatoire).
- **Monotones** : croissante et majorée $\Rightarrow$ converge (vers $L \leq M$, pas forcément M) ; croissante non majorée $\Rightarrow +\infty$ (démonstration exigible).

5 Méthodes

1. **Récurrence** : nommer P(n) ; initialisation ; hérédité (« supposons P(n) vraie pour un entier n fixé ») ; conclusion.
2. **$u_{n+1} = f(u_n)$** : résoudre $f(x) = x$; encadrer et étudier la monotonie par récurrence ; monotone bornée $\Rightarrow$ converge ; limite = point fixe compatible (f continue).
3. **$u_{n+1} = a u_n + b$** : point fixe ℓ ; $v_n = u_n - \ell$ géométrique de raison a ; $u_n = \ell + v_0 a^n$.
4. **Seuil** : boucle « while $u \leq A : u = f(u) ; n = n + 1$ » qui renvoie le premier rang tel que $u_n > A$.

6 Pièges

- Bornée ne veut pas dire convergente ; croissante ne veut pas dire « tend vers $+\infty$ ».
- Le point fixe ne prouve pas la convergence : d'abord monotone et bornée.
- Gendarmes avec deux limites différentes : rien à conclure.
- Récurrence sans initialisation, ou hypothèse « pour tout n » : démonstration invalide.

L'ESSENTIEL

- Une suite converge vers L, tend vers $\pm\infty$, ou n'a pas de limite : dans les deux derniers cas elle diverge.
- q^n tend vers $+\infty$ si $q > 1$, vers 0 si $-1 < q < 1$, n'a pas de limite si $q \leq -1$.
- Devant une forme indéterminée : factoriser par le terme dominant ou utiliser le conjugué.

- Gendarmes = deux suites encadrantes de même limite finie ; comparaison = une seule suite suffit pour l'infini.
- Croissante et majorée $\Rightarrow$ convergente ; croissante non majorée $\Rightarrow$ tend vers $+\infty$.
- Récurrence : initialisation, hérédité, conclusion ; puis $f(L) = L$ pour la limite d'une suite $u(n+1) = f(u(n))$.