Limites de suites

Fiche tableaux : les limites à connaître
(Spécialité maths Terminale)

Limites de référence

Suite	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{n^3}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
Limite	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	0	0	0

Exemple : $\lim\left(2+\frac{9}{\sqrt{n}}\right)=2$, car $\frac{9}{\sqrt{n}}\to 0$.

Somme

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**FI**

Exemple : $\lim\left(n^2+\frac{1}{n}\right)=+\infty$ (« $+\infty+0$ »). Forme indéterminée : $n^2-n=n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\to+\infty$.

Produit

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ (règle des signes)
0	$\pm\infty$	**FI**

Exemple : $\lim(-5n^2)=-\infty$ (« $(-5)\times(+\infty)$ »). Forme indéterminée : $n^2\times\frac{1}{n}=n\to+\infty$ mais $n\times\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\to 0$.

Quotient

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
ℓ	$\ell'\neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$
ℓ	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\ell\neq 0$ ou $\pm\infty$	0, v_n de signe constant	$\pm\infty$ (règle des signes)
$\pm\infty$	$\pm\infty$	**FI**
0	0	**FI**

Exemple : $\lim \dfrac{8}{n+2} = 0$ (« $\dfrac{8}{+\infty}$ ») ; $\dfrac{1}{1/n} = n \to +\infty$ (« $\dfrac{1}{0}$ » avec $\dfrac{1}{n} > 0$). Forme indéterminée : $\dfrac{2n+1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n} \to 2$.

Limite de q^n et suites géométriques

q	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$
$\lim u_0 q^n$ $(u_0 > 0)$	pas de limite	0	u_0	$+\infty$
$\lim u_0 q^n$ $(u_0 < 0)$	pas de limite	0	u_0	$-\infty$
$1 + q + \cdots + q^n$	pas de limite	$\dfrac{1}{1-q}$	$+\infty$	$+\infty$

Exemples : $\lim 0{,}2^n = 0$; $\lim(-8 \times 1{,}1^n) = -\infty$; $1 + 0{,}6 + \cdots + 0{,}6^n \to \dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$.

Comparaison, gendarmes, monotonie

Si…	**et si…**	**alors…**
$u_n \geqslant v_n$ (à partir d'un rang)	$v_n \to +\infty$	$u_n \to +\infty$
$u_n \leqslant w_n$ (à partir d'un rang)	$w_n \to -\infty$	$u_n \to -\infty$
$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$	$a_n \to \ell$ et $b_n \to \ell$	$u_n \to \ell$ (gendarmes)
$u_n \leqslant v_n$, $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell'$	—	$\ell \leqslant \ell'$
(u_n) croissante	majorée	(u_n) converge
(u_n) croissante	non majorée	$u_n \to +\infty$
(u_n) décroissante	minorée	(u_n) converge
(u_n) décroissante	non minorée	$u_n \to -\infty$

Exemples : $n + \sin n \geqslant n - 1 \to +\infty$; $\dfrac{-1}{n} \leqslant \dfrac{\sin n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donne $\dfrac{\sin n}{n} \to 0$.

Suites arithmético-géométriques

Relation	**Point d'équilibre**	**Suite auxiliaire**	**Forme explicite**	**Limite si $-1 < a < 1$**
$u_{n+1} = a u_n + b$, $a \neq 1$	$\ell = \dfrac{b}{1-a}$	$v_n = u_n - \ell$, géométrique de raison a	$u_n = \ell + (u_0 - \ell)\, a^n$	ℓ

Exemple : $u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 2$ et $u_0 = 1$: $\ell = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$, $u_n = 10 - 9 \times 0{,}8^n \to 10$.

Ce document est la propriété intellectuelle de Ben, professeur particulier (benprofparticulier.fr), protégée par le Code de la propriété intellectuelle (art. L. 111-1 et L. 122-4). Il est mis à disposition pour un usage personnel de révision. Toute reproduction, diffusion, mise en ligne ou revente, totale ou partielle, sans autorisation écrite est interdite et constitue une contrefaçon (art. L. 335-2).