

Devoir surveillé – Limites de suites

Comportement asymptotique des suites : convergence, divergence et théorèmes de comparaison
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Nom : _____ Date : _____ Note : _____ / 20

Tous les calculs doivent figurer sur la copie. Les résultats seront donnés sous la forme la plus simple possible.

Exercice 1 – Limites de suites usuelles

(4 pts)

Déterminer la limite de chaque suite en justifiant.

- a) $u_n = 9 - \frac{5}{n^3}$ pour $n \geq 1$.
- b) $v_n = -n^2 + 3n$.
- c) $w_n = 200 \times 0,95^n$.
- d) $t_n = (-1,05)^n$. La suite a-t-elle une limite ?

Exercice 2 – Formes indéterminées

(4 pts)

Déterminer la limite de chaque suite.

- a) $u_n = \frac{6n^2 - n}{2n^2 + 5}$.
- b) $v_n = \frac{n+7}{n^2-3}$ pour $n \geq 2$.
- c) $w_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$.
- d) $t_n = 5^n - 4^n$.

Exercice 3 – Récurrence et seuil

(4 pts)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

- a) Calculer u_1 et u_2 .
- b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \times 3^n + 2$.
- c) En déduire la limite de (u_n) .
- d) Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > 10\,000$, et donner la valeur renvoyée.

Exercice 4 – Comparaison et encadrement

(4 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{5n + 2(-1)^n}{n + 3}$.

- a) Montrer que pour tout n : $\frac{5n-2}{n+3} \leq u_n \leq \frac{5n+2}{n+3}$.
- b) En déduire la limite de (u_n) .
- c) Soit $v_n = n^3 + \cos n$. Déterminer la limite de (v_n) .
- d) Un élève affirme : « la suite $w_n = 2 + (-1)^n$ n'a pas de limite parce qu'elle est bornée ». La conclusion est-elle juste ? L'argument est-il valable ? Justifier.

Exercice 5 – Modèle forestier*(4 pts)*

Une forêt couvre 900 hectares en 2026. Chaque année, 4 % de la surface boisée disparaît, puis 60 hectares sont replantés. On note s_n la surface boisée (en hectares) en $2026 + n$, avec $s_0 = 900$.

- a) Calculer s_1 et justifier que $s_{n+1} = 0,96 s_n + 60$ pour tout n .
- b) Démontrer par récurrence que $s_n \leq 1\,500$ pour tout n , puis montrer que (s_n) est croissante.
- c) On pose $v_n = s_n - 1\,500$. Montrer que (v_n) est géométrique et exprimer s_n en fonction de n .
- d) Déterminer la limite de (s_n) , l'interpréter, puis déterminer l'année à partir de laquelle la surface dépasse 1 400 hectares. On donne $0,96^{43} \approx 0,173$ et $0,96^{44} \approx 0,166$.

Bon courage !