

Corrigé et barème – Limites de suites

Comportement asymptotique des suites : convergence, divergence et théorèmes de comparaison
(programme de Terminale spécialité maths)

Durée : 60 min – Calculatrice interdite – Sur 20 points · Spécialité Mathématiques Terminale

Exercice 1 – Limites de suites usuelles

(4 pts)

- a) $\frac{5}{n^3} \rightarrow 0$ car $n^3 \rightarrow +\infty$, donc $u_n \rightarrow 0$. (1)
- b) FI « $-\infty + \infty$ » : $v_n = n^2 \left(-1 + \frac{3}{n}\right)$, avec $n^2 \rightarrow +\infty$ et $-1 + \frac{3}{n} \rightarrow -1$, donc $v_n \rightarrow -\infty$. (1)
- c) $0 < 0,95 < 1$ donc $0,95^n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow 0$. (1)
- d) $|t_n| = 1,05^n \rightarrow +\infty$ ($1,05 > 1$) et les termes changent de signe à chaque rang : (t_n) n'a pas de limite. (1)

Erreur fréquente — conclure « $-n^2 + 3n \rightarrow -\infty$ » sans lever la forme indéterminée : il faut factoriser par n^2 avant d'appliquer la règle du produit.

Exercice 2 – Formes indéterminées

(4 pts)

- a) $u_n = \frac{6-1/n}{2+5/n^2} \rightarrow \frac{6}{2} = 3$. (1)
- b) $v_n = \frac{n(1+7/n)}{n^2(1-3/n^2)} = \frac{1}{n} \times \frac{1+7/n}{1-3/n^2} \rightarrow 0 \times 1 = 0$. (1)
- c) Conjugué : $w_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n+n}} = \frac{2}{\sqrt{1+2/n+1}} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$. (1)
- d) $t_n = 5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$; $5^n \rightarrow +\infty$ et la parenthèse tend vers 1 : $t_n \rightarrow +\infty$. (1)

Le point clé — pour un quotient, on factorise haut et bas par la plus haute puissance de n ; pour une différence de racines ou de puissances, on factorise par le terme dominant ou on passe par le conjugué.

Exercice 3 – Récurrence et seuil

(4 pts)

- a) $u_1 = 3 \times 4 - 4 = 8$; $u_2 = 3 \times 8 - 4 = 20$. (1)
- b) Initialisation : $2 \times 3^0 + 2 = 4 = u_0$. Hérédité : si $u_n = 2 \times 3^n + 2$ pour un entier n fixé, alors $u_{n+1} = 3(2 \times 3^n + 2) - 4 = 2 \times 3^{n+1} + 6 - 4 = 2 \times 3^{n+1} + 2$. Conclusion : vrai pour tout n . (1)
- c) $3 > 1$ donc $3^n \rightarrow +\infty$, et $u_n \rightarrow +\infty$. (1)
- d) **def seuil()**: $n = 0$; $u = 4$; **while** $u \leq 10000$: $u = 3*u - 4$; $n = n + 1$; **return** n (une instruction par ligne). $u_7 = 4376$ et $u_8 = 13124$: la fonction renvoie 8. (1)

À retenir — dans l'hérédité, on part de la relation $u_{n+1} = 3u_n - 4$ et on remplace u_n par l'hypothèse de récurrence, jamais l'inverse.

Exercice 4 – Comparaison et encadrement

(4 pts)

- a) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $-2 \leq 2(-1)^n \leq 2$, puis $5n - 2 \leq 5n + 2(-1)^n \leq 5n + 2$; on divise par $n + 3 > 0$. (1)
- b) $\frac{5n-2}{n+3} = \frac{5-2/n}{1+3/n} \rightarrow 5$ et de même $\frac{5n+2}{n+3} \rightarrow 5$: par le théorème des gendarmes, $u_n \rightarrow 5$. (1)
- c) $\cos n \geq -1$ donc $v_n \geq n^3 - 1$, et $n^3 - 1 \rightarrow +\infty$: par comparaison, $v_n \rightarrow +\infty$. (1)
- d) La conclusion est juste mais l'argument est faux : une suite bornée peut converger ($\frac{1}{n}$). La bonne raison : w_n vaut 3 aux rangs pairs et 1 aux rangs impairs, deux valeurs distinctes prises une infinité de fois, ce qui interdit toute limite. (1)

Attention — « bornée » n'implique ni convergence ni divergence ; c'est l'oscillation entre deux valeurs qui empêche l'existence d'une limite.

Exercice 5 – Modèle forestier*(4 pts)*

- a) Perdre 4 % = multiplier par 0,96, puis ajouter 60 : $s_{n+1} = 0,96 s_n + 60$; $s_1 = 0,96 \times 900 + 60 = 924$. (1)
- b) Initialisation : $s_0 = 900 \leq 1500$. Hérédité : si $s_n \leq 1500$, alors $s_{n+1} \leq 0,96 \times 1500 + 60 = 1500$.
Croissance : $s_{n+1} - s_n = 60 - 0,04 s_n = 0,04(1500 - s_n) \geq 0$. (1)
- c) $v_{n+1} = 0,96 s_n + 60 - 1500 = 0,96(s_n - 1500) = 0,96 v_n$: géométrique de raison 0,96, $v_0 = -600$.
Donc $s_n = 1500 - 600 \times 0,96^n$. (1)
- d) $0,96^n \rightarrow 0$ donc $s_n \rightarrow 1500$: la surface se stabilise vers 1500 ha sans jamais les atteindre. $s_n > 1400 \iff 0,96^n < \frac{1}{6} \approx 0,1667$; d'après les valeurs données, $0,96^{43} > \frac{1}{6}$ et $0,96^{44} < \frac{1}{6}$, donc $n = 44$: à partir de 2070 ($s_{44} \approx 1400,4$). (1)

Repère — croissante et majorée par 1 500 prouve la convergence ; c'est la forme explicite $s_n = 1500 - 600 \times 0,96^n$ qui donne la valeur exacte de la limite.