

Limites de fonctions

Ce chapitre apprend à décrire le comportement d'une fonction à l'infini ou près d'une valeur interdite : calculer une limite, lever une forme indéterminée, reconnaître une asymptote et conclure avec les théorèmes de comparaison.

1 Définitions

- **Limite en $\pm\infty$:** $f(x)$ se rapproche de ℓ (limite finie) ou dépasse tout réel A (limite infinie) pour x assez grand.
- **Asymptote horizontale $y = \ell$:** quand $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$.
- **Asymptote verticale $x = a$:** quand $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ (à gauche a^- ou à droite a^+).
- **Position relative :** signe de $f(x) - \ell$.

2 Limites de référence

- $x^n \rightarrow +\infty$ en $+\infty$; en $-\infty$: $+\infty$ si n pair, $-\infty$ si n impair.
- $\frac{1}{x^n} \rightarrow 0$ en $\pm\infty$; $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ en 0^+ , $-\infty$ en 0^- .
- $\sqrt[n]{x} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.
- $e^x \rightarrow +\infty$ en $+\infty$, $e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.

3 Opérations et formes indéterminées

- Somme, produit, quotient : règles naturelles avec la règle des signes ; $\frac{\ell}{\infty} = 0$, $\frac{\ell}{0^\pm} = \pm\infty$ si $\ell \neq 0$ (règle des signes).
- **Quatre formes indéterminées :** « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $\frac{0}{0}$ ».
- Composée : poser $X = u(x)$, chercher la limite de X , puis appliquer la limite de référence.

4 Comparaison et croissances comparées

- **Comparaison :** $f \geq g$ et $g \rightarrow +\infty \Rightarrow f \rightarrow +\infty$ (et symétrique en $-\infty$).
- **Gendarmes :** $g \leq f \leq h$, g et h de même limite $\ell \Rightarrow f \rightarrow \ell$.
- **Croissances comparées :** $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty$ en $+\infty$; $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$; $x e^x \rightarrow 0$ en $-\infty$.

5 Méthodes

1. **Polynôme en $\pm\infty$:** factoriser le terme de plus haut degré.
2. **Fonction rationnelle en $\pm\infty$:** factoriser les termes dominants en haut et en bas, simplifier.
3. **En un réel a :** remplacer x par a ; si « $\frac{\ell}{0}$ », étudier le signe du dénominateur de chaque côté ; si « $\frac{0}{0}$ », factoriser par $(x - a)$ ou utiliser la quantité conjuguée.
4. **Avec $\sin$ ou $\cos$:** encadrer entre -1 et 1 , propager, gendarmes.
5. **Avec e^x :** mettre e^x en facteur et faire apparaître $\frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0$.

6 Pièges

- « $\infty - \infty = 0$ » et « $\frac{\infty}{\infty} = 1$ » sont faux : il faut transformer.
- Le terme dominant ne sert qu'en $\pm\infty$, jamais en un réel.
- Préciser 0^+ ou 0^- : les limites à gauche et à droite peuvent différer.
- Une courbe peut couper son asymptote horizontale.

L'ESSENTIEL

- Une limite finie en l'infini donne une asymptote horizontale ; une limite infinie en un réel donne une asymptote verticale.
- Les quatre formes indéterminées sont « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « ∞/∞ » et « $0/0$ » : on factorise, on conjugue ou on compare.

- En $\pm\infty$, un polynôme ou une fraction rationnelle se comporte comme ses termes de plus haut degré.
- Théorème des gendarmes : deux encadrements de même limite finie ; théorème de comparaison : une inégalité et une limite infinie.
- Croissance comparée : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x , en $+\infty$ comme en $-\infty$.